1 .06 Απόλυτη τιμή Πραγματικού Αριθμού

Η απόλυτη τιμή ορίζεται ως εξής $|x| = \begin{cases} -x & x < 0 \\ x & x \geq 0 \end{cases}$. Συνεπώς $|x| \geq 0$

Οι ιδιότητες των απολύτων αναφέρονται στο σχολικό βιβλίο. Εδώ θα Ομαδοποιήσουμε μερικές από τις ιδιότητες αυτές ως προς την χρήση τους.

Για την λύση εξισώσεων

Χρησιμοποιούμε τις παρακάτω ιδιότητες:

1) $|x| = |\alpha| \Leftrightarrow x = \pm\alpha$

2) $|x| = \alpha \Leftrightarrow x = \pm\alpha$ με $\alpha \geq 0$. Αν το $\alpha<0$ η εξίσωση είναι ΑΔΥΝΑΤΗ.

Για την λύση Ανισώσεων

Χρησιμοποιούμε τις παρακάτω ιδιότητες:

1) $|x| \leq \theta \Leftrightarrow -\theta \leq x \leq \theta$ με $\theta \geq 0$ Αν το $\theta < 0$ τότε η ανίσωση είναι ΑΔΥΝΑΤΗ

2) $|x| \geq \theta \Leftrightarrow x \leq -\theta$ ή $x \geq \theta$ με $\theta \geq 0$ Αν το $\theta < 0$ τότε η ανίσωση ισχύει για κάθε τιμή του πραγματικού αριθμού χ,

Για την απόδειξη θεωρητικών Ασκήσεων

1) $|x| = |-x|$ ή γενικότερα $|x - y| = |y - x|$

2) $|x| \geq x$ και $|x| \geq -x$

3) $|x|^2 = x^2$ (Βασική σχέση για την απαλειφή των απολύτων σε θεωρητικές ασκήσεις και όχι στην επίλυση εξισώσεων – ανισώσεων)

4) $|x + y| \leq |x| + |y|$

Απόσταση δύο αριθμών

Η απόσταση δύο αριθμών α,β συμβολίζεται με $\mathrm{d}(\alpha,\beta)$ και είναι ίση με την απόλυτη τιμή της διαφοράς τους $\mathrm{d}(\alpha,\beta)=|\alpha-\beta|=|\beta-\alpha|$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 1.06.1

Ασκήσεις Απλοποίησης παραστάσεων με απόλυτα.

Υπάρχουν δύο ομάδες τέτοιων ασκήσεων.

Α. Η πρώτη είναι να δίνονται στην υπόθεση της άσκησης πληροφορίες για την σχέση διάταξης των μεταβλητών, και τότε:

i) Ελέγχουμε τα πρόσημα των παραστάσεων που βρίσκονται στα απόλυτα και

ii) Βγάζουμε τα απόλυτα **όπως είναι** στην περίπτωση που η παράσταση είναι θετική ή με ένα **μείον** στην περίπτωση που είναι αρνητική.

Β. Η δεύτερη είναι να μην δίνονται στην υπόθεση της άσκησης πληροφορίες για την σχέση διάταξης των μεταβλητών, και τότε:

i) Ελέγχουμε τα πρόσημα των παραστάσεων Α που βρίσκονται στα απόλυτα λύνοντας μία ανίσωση Α>0 και βρίσκουμε τις ρίζες κάθε μίας.

ii) Διατάσσουμε τις ρίζες αυτές στον άξονα των πραγματικών αριθμών και φτιάχνουμε ένα κοινό πίνακα προσήμων, τοποθετώντας το πρόσημο κάθε παράστασης στα διαστήματα που έχουν δημιουργηθεί στον άξονα.

iii) Βγάζουμε τα απόλυτα σε κάθε διάστημα του άξονα με βάση τα πρόσημα του πίνακα που έχουμε δημιουργήσει.

Παράδειγμα 34. Αν $\alpha<\beta<\gamma$ να απλοποιηθεί η παράσταση

$$A=|\alpha-\beta|-2|\gamma-\beta|-|\alpha-\gamma|$$

Λύση **Διαβάζουμε πρώτα** ➲ ΜΕΘ 1.06.1 -Α

Αφού α<β<γ έχουμε α-β<0 και α-γ<0 ενώ β<γ άρα γ-β>0. Συνεπώς

$$A=|\alpha-\beta|-2|\gamma-\beta|-|\alpha-\gamma|=-(\alpha-\beta)-2(\gamma-\beta)+(\alpha-\gamma)=$$
$$=-\alpha+\beta-2\gamma+2\beta+\alpha-\gamma=3\beta-3\gamma$$

Παράδειγμα 35. Να απλοποιηθεί η παράσταση $A=|x+1|-2|x-2|+x$

Λύση **Διαβάζουμε πρώτα ➲** ▤ΜΕΘ 1.06.1-Β

Ελέγχουμε τα πρόσημα των παραστάσεων που είναι σε απόλυτα:

$x+1>0 \Leftrightarrow x>-1$ συνεπώς ρίζα το -1

$x-2>0 \Leftrightarrow x>2$ συνεπώς ρίζα το 2. Φτιάχνουμε τον ΠΙΝΑΚΑ ΠΡΟΣΗΜΩΝ

	$-\infty$ -1	2	$+\infty$
x+1	**-**	**+**	**+**
x-2	**-**	**-**	**+**

ΔΙΑΚΡΙΝΟΥΜΕ τις παρακάτω περιπτώσεις με βάση τα διαστήματα που έχουν προκύψει στον άξονα του πίνακα:

Αν χ<-1 τότε $A=|x+1|-2|x-2|+x=-(x+1)+2(x-2)+x=$

$=-x-1+2x-4+x=2x-5$

Αν $-1\le x\le 2$ τότε $A=|x+1|-2|x-2|+x=x+1+2(x-2)+x=$

$=x+1+2x-4+x=4x-3$

Αν χ>2 τότε $A=|x+1|-2|x-2|+x=x+1-2(x-2)+x=$

$$=x+1-2x+4+x=5 \text{ ΑΡΑ } A=\begin{cases}2x-5 & x<-1\\ 4x-3 & -1\le x\le 2\\ 5 & x>2\end{cases}$$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 1.06.2

Επίλυση ανισώσεων και εξισώσεων με απόλυτα.

1) Αν στην εξίσωση ή ανίσωση εμφανίζεται ΕΝΑ μόνο απόλυτο ή το ΙΔΙΟ απόλυτο περισσότερες φορές ΧΩΡΙΣ να έχουμε μεταβλητή (άγνωστο) σε όρο εκτός των απολύτων, τότε:

i) Επιλύουμε την εξίσωση ή ανίσωση ως προς το απόλυτο (κάνουμε αντικατάσταση το απόλυτο) και

ii) Καταλήγουμε στην εφαρμογή των ιδιοτήτων που περιγράψαμε στην αρχή της ενότητας.

2) Αν στην εξίσωση ή ανίσωση εμφανίζονται ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΑ απόλυτα ή απόλυτο και έχουμε μεταβλητή (άγνωστο) σε όρο εκτός των απολύτων, τότε:

i) Κάνουμε πίνακα προσήμων όπως περιγράψαμε στην Μεθοδολογία 1.04.1 και

ii) Λύνουμε την εξίσωση ή ανίσωση σε κάθε διάστημα που προκύπτει από τον πίνακα.
<u>ΠΡΟΣΟΧΗ</u> δεν ξεχνάμε στο τέλος κάθε επίλυσης να ελέγχουμε αν οι λύσεις που προέκυψαν ανήκουν στο διάστημα στο οποίο επιλύουμε.

Παράδειγμα 36. Να λυθεί η εξίσωση $2|x-3|>4$

<u>Λύση</u> **Διαβάζουμε πρώτα** ➲ ΜΕΘ 1.06.2 -1

$$2|x-3|>4 \Leftrightarrow |x-3|>2 \text{ άρα } \begin{cases} x-3>2 \Leftrightarrow x>5 \\ x-3<-2 \Leftrightarrow x<-1 \end{cases}$$

Παράδειγμα 37. Να λυθεί η εξίσωση $\dfrac{|x+1|+4}{3}-\dfrac{3|x+1|-1}{15}=\dfrac{|x+1|-4}{5}+2$

<u>Λύση</u> **Διαβάζουμε πρώτα** ➲ ΜΕΘ 1.06.2 -1

Θέτουμε $|x+1|=y$ άρα $\dfrac{|x+1|+4}{3}-\dfrac{3|x+1|-1}{15}=\dfrac{|x+1|-4}{5}+2 \Leftrightarrow$

$$\frac{y+4}{3}-\frac{3y-1}{15}=\frac{y-4}{5}+2 \Leftrightarrow 5(y+4)-(3y-1)=3(y-4)+30 \Leftrightarrow$$

$5y+20-3y+1=3y-12+30 \Leftrightarrow -y=-3 \Leftrightarrow y=3$, οπότε