4 .02 *Νόμος εκθετικής μεταβολής*

Εστω μέγεθος Q το οποίο μεταβάλλεται σε συνάρτηση με τον χρόνο t με βάση τον τύπο Q(t). Αν ο τύπος αυτός έχει την μορφή:

$Q(t) = Q_o.e^{c.t}$.όπου c σταθερός αριθμός ΤΟΤΕ λέμε ότι το μέγεθος Q μεταβάλλεται σύμφωνα με τον **Νόμο της εκθετικής μεταβολής**.

Το Q_o είναι η **αρχική τιμή** του μεγέθους, δηλαδή η τιμή του σε χρόνο t=0. Όταν το c>0 τότε το μέγεθος Q αυξάνει εκθετικά ενώ όταν το c<0 τότε το Q μειώνεται εκθετικά.

Χρόνος υποδιπλασιασμού ενός μεγέθους Q

Είναι ο χρόνος που απαιτείται ώστε το μέγεθος Q να μειωθεί στο μισό της αρχικής του τιμής άρα να γίνει $Q_o/2$

Υπολογισμός του χρόνου ημιζωής.

Λύνουμε την εξίσωση $Q(t) = \frac{Q_o}{2} \Leftrightarrow Q_o.e^{-c.t} = \frac{Q_o}{2} \Leftrightarrow e^{-ct} = \frac{1}{2}$

Η εξίσωση αυτή όπως θα δούμε παρακάτω λύνεται με την χρήση λογαρίθμων και δίνει σαν λύση ότι ο χρόνος ημιζωής είναι $t = \frac{\ln 2}{c}$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 4.02.1

Σε κάθε συνάρτηση με μορφή εκθετικής (έχουμε μεταβλητό εκθέτη) απαραίτητη προϋπόθεση η βάση της πρέπει να είναι μεγαλύτερη του μηδενός. Στην Π4.1.3 έχουμε αναφέρει ότι αν η βάση είναι το 1 ορίζεται

ως συνάρτηση σε όλο το R, αλλά δεν είναι εκθετική συνάρτηση και δεν είναι 1-1.

Παράδειγμα 1. Να βρεθεί το α ώστε η συνάρτηση $f(x)=\left(\frac{\alpha-2}{\alpha+1}\right)^x$.

α) Ώστε να έχει πεδίο ορισμού τους πραγματικούς αριθμούς.

β) Να είναι αύξουσα.

γ) Να είναι 1-1.

Λύση

α) Πρέπει $\frac{\alpha-2}{\alpha+1}>0\Rightarrow(\alpha-2)(\alpha+1)>0$ κάνουμε πίνακα προσήμων και βρίσκουμε $\alpha<-1$ ή $\alpha>2$ (1)

β) Για να είναι μία εκθετική συνάρτηση αύξουσα αρκεί η βάση της να είναι μεγαλύτερη του 1 άρα

$$\frac{\alpha-2}{\alpha+1}>1\Rightarrow\frac{\alpha-2}{\alpha+1}-1>0\Rightarrow\frac{\alpha-2-\alpha-1}{\alpha+1}>0\Rightarrow-\frac{3}{\alpha+1}>0\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\alpha+1<0\Rightarrow\alpha<-1$$

γ) Για να είναι 1-1 αρκεί η βάση να είναι θετική και διάφορη του 1.

$\frac{\alpha-2}{\alpha+1}\neq1\Leftrightarrow\alpha-2\neq\alpha+1\Leftrightarrow-2\neq1$ που ισχύει άρα από την (1) αρκεί $\alpha<-1$ ή $\alpha>2$.

Παράδειγμα 2. Να εξεταστεί αν η $f(x)=\frac{e^{2x}-e^{-2x}}{e^{2x}+e^{-2x}}$ είναι άρτια ή περιττή

Λύση

Υπενθύμιση

1.. Μία συνάρτηση f είναι **ΑΡΤΙΑ** όταν:

i) για κάθε $x \in D_f$ έχουμε και $-x \in D_f$

ii) $f(-x) = f(x)$

2.. Μία συνάρτηση f είναι **ΠΕΡΙΤΤΗ** όταν:

i) για κάθε $x \in D_f$ έχουμε $-x \in D_f$

ii) $f(-x) = -f(x)$

Πρέπει $e^{2x} + e^{-2x} \neq 0$, αυτό ισχύει ως άθροισμα θετικών. Συνεπώς $D_f = R$ και άρα αν $x \in R$ και το $-x \in R$

$$f(-x) = \frac{e^{2(-x)} - e^{-2(-x)}}{e^{2(-x)} + e^{-2(-x)}} = \frac{e^{-2x} - e^{2x}}{e^{-2x} + e^{2x}} = -\frac{e^{2x} - e^{-2x}}{e^{-2x} + e^{2x}} = -f(x)$$

Άρα η f είναι περιττή.

ΓΡΑΦΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ

Υπενθύμιση

Αν ο τύπος περιέχει απόλυτα : Πρώτα βγάζουμε τα απόλυτα, γράφουμε την συνάρτηση κατά κλάδους (συνάρτηση πολλαπλού τύπου) και μετά κάνουμε **<u>στο ίδιο σύστημα</u>** αξόνων την γραφική παράσταση κάθε κλάδου.

Γραφική παράσταση αντίθετων συναρτήσεων: Είναι συμμετρικές ως προς χχ΄ π.χ οι $f(x) = e^x$ και $g(x) = -e^x$

Κατακόρυφη μετατόπιση (Μεταφορά άξονα χχ΄). Όταν έχουμε συνάρτηση f(x) τότε η γραφική παράσταση της $g(x) \pm c$ προκύπτει με κατακόρυφη μετατόπιση της f κατά $\pm c$ μονάδες πάνω (+c) ή κάτω (-c).