## ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 1.04.2

☑ **Ασκήσεις με παραστάσεις της μορφής $z_1^{\kappa} \pm z_2^{\kappa}$ με $z_1, z_2$ συγκεκριμένοι μιγαδικοί.**

*i..* Εξετάζουμε μήπως οι μιγαδικοί συνδέονται με σχέση της μορφής $z_1 = \pm i.z_2$.

*ii..* Αντικάθιστούμε τον ένα και βγάζουμε κοινό παράγοντα. Συνήθως καταλήγουμε σε εφαρμογή των δυνάμεων του i.

***Παράδειγμα 8.*** Να βρείτε την τιμή της παράστασης:
$A = (1-2i)^{2004} - (2+i)^{2004}$

**Λύση** **Διαβάζουμε πρώτα ➲ ΜΕΘ.1.04.2**

Παρατηρούμε ότι $2+i = i.(1-2i)$ άρα

$(2+i)^{2004} = [i(1-2i)]^{2004} = i^{2004}.(1-2i)^{2004} = (1-2i)^{2004}$ μιάς και $i^{2004} = 1$.

Συνεπώς $A = (1-2i)^{2004} - (1-2i)^{2004} = 0$

## 🕮 ΕΠΙΣΗΜΑΝΣΕΙΣ

**1..** Στους πραγματικούς αριθμούς είναι αδύνατο να παραγοντοποιήσουμε μία παράσταση της μορφής $A = \alpha^2 + \beta^2$ και μάλιστα $\alpha^2 + \beta^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$ & $\beta = 0$. Στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών αυτά δεν ισχύουν, διότι αν $\alpha, \beta \in C$ μπορούμε να γράψουμε:

$A = \alpha^2 + \beta^2 = \alpha^2 - i^2.\beta^2 = (\alpha - i.\beta).(\alpha + i.\beta)$ άρα αν $A = 0$ τότε $\alpha - i.\beta = 0$ ή $\alpha + i.\beta = 0$ συνεπώς $\alpha = i.\beta$ ή $\alpha = -i.\beta$

**2..** Οταν μας δίνουν μιγαδικούς αριθμούς (παραστάσεις) , που δεν είναι στην μορφή $\alpha+\beta i$ είναι **απαραίτητο** να τους φέρνουμε στην μορφή αυτή.

***Παράδειγμα 9.*** α) Να βρεθεί ο συζυγής του μιγαδικού $z=\dfrac{2}{1-i}+2i$

β) Να βρεθεί ο συζυγής του $w=\dfrac{z+3}{2i-iz}$.

**Λύση**

α) Εκτελούμε τις πράξεις

$$z=\frac{2}{1-i}+2i=\frac{2(1+i)}{(1-i)(1+i)}+2i=\frac{2+2i}{2}+2i=$$

$=1+i+2i=1+3i$ άρα $\bar{z}=1-3i$

β) Έχουμε $\bar{w}=\overline{\left(\dfrac{z+3}{2i-iz}\right)}=\dfrac{\overline{z+3}}{\overline{2i-iz}}=\dfrac{\bar{z}+3}{-2i+i\bar{z}}$

**ΜΕΘΟΔΟΣ**

Όταν έχουμε συζυγή παράστασης παίρνουμε τον συζυγή κάθε όρου της.

## ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 1.04.3

☑ **Οταν θέλουμε να δείξουμε ότι ένας μιγαδικός αριθμός z είναι πραγματικός τότε ακολουθούμε δύο πιθανούς τρόπους επίλυσης:**

***i..*** Τον φέρνουμε στην μορφή $z=\mathbf{Re}(z)+\mathbf{Im}(z).i$ και δείχνουμε ότι $\mathbf{Im}(z)=0$

ή

***ii..*** Δείχνουμε ότι $z=\bar{z}$.

## ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 3.01.5

**3.ΙΙ Αν η συνάρτηση f είναι κλασματική και έχει ρίζα σε αριθμητή ή παρονομαστή.**

*i..* Πολλαπλασιάζουμε αριθμητή και παρονομαστή με τη **συζυγή παράσταση** (δείτε παρακάτω),

*ii..* Εκτελούμε τις πράξεις και απλοποιούμε τους παράγοντες που προκαλούν τον μηδενισμό των όρων και τέλος

*iii..* αντικαθιστούμε όπου χ το $\chi_o$ και βρίσκουμε το όριο.

**? Ποια είναι η συζυγής παράσταση;**

Όταν χρησιμοποιούμε την «συζυγή» παράσταση του α-β ή του α+β όπου α ή β κάποια ρίζα, τότε στόχος είναι ή απαλοιφή της ρίζας υψώνοντας την σε κατάλληλη δύναμη (ίδια με την τάξη της) ΑΡΑ:

① Αν η ρίζα είναι τετραγωνική τότε η συζυγής του α+β είναι το α-β και αντίστροφα. Πολλαπλασιάζοντας έχουμε $(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)=\alpha^2-\beta^2$

② Αν έχουμε ρίζα τρίτης τάξης τότε η συζυγής του α+β είναι το $\alpha^2$-αβ+$\beta^2$ ώστε $(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)=\alpha^3+\beta^3$.

③ Αν έχουμε ρίζα τρίτης τάξης τότε η συζυγής του α-β είναι το $\alpha^2$+αβ+$\beta^2$ ώστε $(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)=\alpha^3-\beta^3$

***Παράδειγμα 4.*** Να βρεθεί το όριο $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-x^2}$

**Λύση** **Διαβάζουμε πρώτα ➲ ▤ΜΕΘ.3.01.5**

Αντικαθιστούμε όπου χ=0 και προκύπτει απροσδιόριστη μορφή 0/0 άρα:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-x^2}=\lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt{x+3}-2\right)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}{x(1-x)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt{x+3}\right)^2-2^2}{x(x-1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{x+3-4}{x(x-1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x(x-1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x\left(\sqrt{x+3}+2\right)}=\frac{1}{4}$$

***Παράδειγμα 5.*** Να βρεθεί το όριο $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$.

**Λύση**

Αντικαθιστούμε όπου χ=1 και προκύπτει απροσδιόριστη μορφή 0/0 άρα πρέπει να πολλαπλασιάσουμε με την συζυγή παράσταση του αριθμητή και του παρονομα-

στή.

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt[3]{x}-1\right)\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{\left(\left(\sqrt[3]{x}\right)^3-1^3\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}{\left(\left(\sqrt{x}\right)^2-1^2\right)\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\left(\sqrt{x}+1\right)}{(x-1)\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}=\frac{2}{3}$$

## ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 3.01.6

**3.III** **Αν η συνάρτηση f είναι κλασματική και έχει ρίζες ίδιας η διαφορετικών τάξεων με ίδια υπόριζα σε αριθμητή** ή παρονομαστή και η χρήση της συζυγούς παράστασης προκαλεί μεγάλο αριθμό πράξεων .

Χρησιμοποιούμε την μέθοδο (**ΜΕΘ.3.01.1**) για την εύρεση ορίου σύνθετης συνάρτησης.

***i..*** Θέτουμε σαν μεταβλητή u=$\sqrt[v]{s(x)}$ την ρίζα με τάξη ν το

ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των τάξεων όλων των ριζών που εμφανίζονται στο όριο. Επιλύουμε την σχέση ως προς χ και

***ii..*** ακολουθούμε ότι περιγράψαμε στην ΜΕΘ.3.1.3 και οδηγούμαστε σε όριο της περίπτωσης **3.I** .

***Παράδειγμα 6.*** Να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x+\sqrt{x}-3}{3\sqrt{x}-2x-1}$.

<u>Λύση</u> **Διαβάζουμε πρώτα ➲ ΜΕΘ.3.01.6**

Είναι προφανές ότι αν επιχειρήσουμε να εφαρμόσουμε την μέθοδο των συζυγών παραστάσεων θα προκαλούσαμε μεγάλο αριθμό πράξεων.

Θέτουμε λοιπόν $u=\sqrt{x}\Leftrightarrow x=u^2$ και $\lim\limits_{x\to1}\sqrt{x}=1$ συνεπώς έχουμε $u\to1$. Αντικαθιστούμε στο όριο:

$$\lim_{x\to1}\frac{2x+\sqrt{x}-3}{3\sqrt{x}-2x-1}=\lim_{u\to1}\frac{2u^2+u-3}{3u-2u^2-1}\overset{\%}{\underset{0}{=}}\lim_{u\to1}\frac{(u-1)(2u+3)}{(u-1)(2u+1)}$$

$$\lim_{u\to1}\frac{2u+3}{2u+1}=\frac{5}{3}$$

**🕮 ΥΠΕΝΘΥΜΙΣΗ**

Αν $\rho_1$ και $\rho_2$ οι ρίζες του τριωνύμου $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ τότε παραγοντοποιείται: $\alpha(x-\rho_1)(x-\rho_2)$

## 4) Όρια συναρτήσεων με απόλυτα

### ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 3.01.7

***i..*** Ελέγχουμε το πρόσημο των παραστάσεων που βρίσκονται σε απόλυτα, και κάνουμε ένα **«κοινό πίνακα προσήμων»** .