ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 4.02.1

☑ **Η απόδειξη ύπαρξης ρίζας εξίσωσης (τουλάχιστον μία) σε κάποιο διάστημα τιμών της μεταβλητής της, οδηγεί στην εφαρμογή του θεωρήματος Bolzano ως εξής**:

i) Μεταφέρουμε όλους τους όρους της εξίσωσης σ' ένα μέλος.

ii) Θεωρούμε ως συνάρτηση την παράσταση του μέλους, με την προυπόθεση ότι ορίζεται στο **ΚΛΕΙΣΤΟ** διάστημα που έχουμε.

iii) Αποδεικνύουμε ότι ισχύουν οι συνθήκες εφαρμογής του Bolzano.

ΠΑ.4.02.2 Στην περίπτωση που δεν δίνεται διάστημα από την εκφώνηση, αναζητούμε κατάλληλο διάστημα ώστε οι τιμές στα άκρα του να είναι ετερόσημες.

☑ Τα ίδια εφαρμόζουμε αν θέλουμε να αποδείξουμε ότι μια σχέση επαληθεύεται για ένα τουλάχιστον x_o σε διάστημα (α,β)

ⓘ Προσοχή

Το ίδιο κάνουμε και όταν θέλουμε να δείξουμε ότι η συνάρτηση έχει δύο ακριβώς, τρείς κ.ο.κ ρίζες. Επαναλαμβάνουμε την διαδικασία σε δύο , τρία κ.ο.κ διαστήματα.

Παράδειγμα 7. Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^3+\sigma\upsilon\nu x=1$ έχει μία τουλάχιστον λύση στο διάστημα $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

<u>**Λύση**</u> **Διαβάζουμε πρώτα ➲ ▤ ΜΕΘ.4.02.1**

Έχουμε $x^3+\sigma\upsilon\nu x=1 \Leftrightarrow x^3+\sigma\upsilon\nu x-1=0$, συνεπώς θεωρούμε ως συνάρτηση την $f(x)=x^3+\sigma\upsilon\nu x-1$ στο $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

Η f είναι συνεχής ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων.

$f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\left(-\frac{\pi}{2}\right)^3+0-1=-\frac{\pi^3}{8}-1<0$ και $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\left(\frac{\pi}{2}\right)^3+0-1=\frac{\pi^3}{8}-1>0$

συνεπώς ισχύει ότι $f\left(-\frac{\pi}{2}\right)\cdot f\left(\frac{\pi}{2}\right)<0$. Αρα από το θεώρημα Bolzano η συνάρτηση f έχει μια τουλάχιστον ρίζα (λύση της αντίστοιχης εξίσωσης) στο $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

Παράδειγμα 8. Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο τομής της συνεχούς συνάρτησης $f:[0,1]\to(0,1)$ με την ευθεία ψ = χ αν χ∈(0,1).

<u>Λύση</u>

Η σχέση που μας δίνει τα σημεία τομής της ευθείας και της συνάρτησης είναι $f(x)=x$. Πρέπει να αποδείξουμε ότι η εξίσωση αυτή έχει μία τουλάχιστον λύση στο διάστημα (0,1). Θεωρούμε την συνάρτηση $g(x)=f(x)-x,\ x\in[0,1]$. Η συνάρτηση g είναι συνεχής ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων. Το σύνολο τιμών της f είναι το (0,1), άρα $0<f(x)<1$, συνεπώς $g(0)=f(0)>0$ και $g(1)=f(1)-1<0$ άρα $g(0)\cdot g(1)<0$.Ισχύει το θεώρημα Bolzano άρα η εξίσωση $f(x)=x$ έχει μία τουλάχιστον λύση στο (0,1).

> 🕮 **ΕΠΙΣΗΜΑΝΣΗ**
> Πολλές φορές η σχέση που χρειάζεται να δείξουμε ότι έχει μια τουλάχιστον λύση δεν δίνεται αλλά περιγράφεται. Η πιο συνηθισμένη μορφή τέτοιων ασκήσεων είναι με τα σημεία τομής δύο συναρτήσεων f,g που εφαρμόζουμε ότι και στο παράδειγμα 7. Άρα θα θεωρούμε την συνάρτηση $h(x)=f(x)-g(x)$

Παράδειγμα 9. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in R$ τέτοιο ώστε να ισχύει η σχέση $\ln\xi=\xi-\frac{3}{2}$.

<u>Λύση</u> Διαβάζουμε πρώτα ➲ ▤ ΜΕΘ.2.02.1 και ΠΑ.4.02.2

Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x)=\ln x-x+\frac{3}{2}$. Αναζητούμε διάστημα [α,β] ώστε οι τιμές στα άκρα να είναι ετερόσημες. (Συνήθως οι τιμές των α,β είναι εύκολα προσδιορίσιμες). Εδώ παρατηρούμε ότι $f(1)=0-1+\frac{3}{2}=\frac{1}{2}>0$ και

$f(e)=1-e+\frac{3}{2}=2{,}5-e<0$. Θεωρούμε την συνάρτηση στο διάστημα [1,e] και αφού η συνάρτηση είναι συνεχής ως άθροισμα συνεχών και $f(1)\cdot f(e)<0$ ισχύει το θεώρημα Bolzano και συνεπώς η εξίσωση έχει μία τουλάχιστον λύση $\xi\in(1,e)$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 4.02.2

☑ Αν η σχέση δεν ορίζεται στο [α,β]

Συνήθως αυτό συμβαίνει όταν τα α,β είναι ρίζες των παρονομάστων που υπάρχουν στην σχέση. Θεωρούμε ως συνάρτηση την ισοδύναμη σχέση που προκύπτει μετά την απαλειφή των παρονομαστών.

Παράδειγμα 10. Να δείξετε ότι η εξίσωση $\frac{1}{x}-e^{x}=-\frac{1}{x-1}$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο διάστημα (0,1).

<u>**Λύση**</u> **Διαβάζουμε πρώτα ➲ ▤ ΜΕΘ.4.02.2**

Παρατηρούμε ότι αν θεωρήσουμε σαν συνάρτηση την ίδια την εξίσωση (όπως περιγράφουμε στην **ΜΕΘ.4.02.1**) δηλ την $f(x)=\frac{1}{x}-e^{x}+\frac{1}{x-1}$ τότε δεν ορίζεται στο [0,1] (μηδενίζονται οι παρονομαστές), για τον λόγο αυτό πρώτα κάνουμε απαλοιφή παρονομαστών στην εξίσωση και έχουμε :

$\frac{1}{x}-e^{x}=-\frac{1}{x-1}\Leftrightarrow x-1-e^{x}\cdot x\cdot(x-1)+x=0$. Τώρα θεωρούμε σαν συνάρτηση την $g(x)=x-1-e^{x}\cdot x\cdot(x-1)+x$, $x\in[0,1]$. Η συνάρτηση g είναι συνεχής ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων και $g(0)=-1$, $g(1)=1$ συνεπώς $g(0)\cdot g(1)<0$ και ισχύει το θεώρημα Bolzano άρα η εξίσωση $g(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον λύση $\xi\in(0,1)$, άρα

$\xi-1-e^{\xi}\cdot\xi\cdot(\xi-1)+\xi=0\underset{(1)}{\Leftrightarrow}\frac{1}{\xi}-e^{\xi}=-\frac{1}{\xi-1}$. Στην (1) διαιρέσαμε με

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 5.02.1

☑ **Πώς βρίσκουμε την εφαπτόμενη ευθεία της C_f στο $χ=χ_o$.**

Γνωρίζωντας τον τύπο της f και το $χ = χ_o$.

i) Βρίσκουμε την παράγωγο f '(χ) άρα βρίσκουμε το συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας $λ = f'(x_0)$

ii) Βρίσκουμε το σημείο επαφής συνάρτησης και ευθείας που είναι πάντα το $A\left(x_o\ ,\ f\left(x_o\right)\right)$

Από τον τύπο ευθείας $\psi - \psi_o = \lambda\left(\chi - \chi_o\right)$ η ζητούμενη ευθεία είναι :

$$\varepsilon: \quad \psi - f\left(x_o\right) = f'\left(x_o\right)\left(x - x_o\right)$$

2^{ος} τρόπος : Έστω ότι η ζητούμενη ευθεία είναι η ε : y = λ χ + β (1).

Αντικαθιστώ το λ που έχει βρεθεί μέσω της παραγώγου και αφου το σημείο Α ανήκει στην ευθεία ε Οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την (1).

$f(χ_0) = λ\, χ_0 + β$ οπότε βρίσκουμε το β.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 5.02.2

☑ **Πώς βρίσκουμε την εφαπτόμενη ευθεία της C_f στο $χ=χ_o$.**

Γνωρίζωντας τον τύπο της f , το λ της ευθείας αλλά όχι το $χ = χ_o$.

i.. Από την σχέση $f'\left(x_o\right) = \lambda$ αντικαθιστώντας το λ που γνωρίζουμε και τον τύπο της $f'(x_o)$, βρίσκουμε το $χ_o$.

ii.. Γνωρίζοντας το $χ_o$ εφαρμόζουμε την ➲ **ΜΕΘ.5.02.1**

🕮 Υπενθύμιση

Ο συντελεστής διεύθυνσης μιας ευθείας ε μπορεί να δοθεί με τους εξής τρόπους:

i) Η ευθεία ε να είναι παράλληλη με γνωστή ευθεία $ε_1$ οπότε $λ_ε = λ_{ε_1}$.

ii) Η ευθεία ε να είναι κάθετη με γνωστή ευθεία $ε_1$ οπότε $λ_ε \cdot λ_{ε_1} = -1$.

iii) Να γνωρίζουμε την γωνία ω που σχηματίζει η ευθεία ε με τον χχ΄ οπότε $λ_ε = εφω$.

iv) Να γνωρίζουμε δύο σημεία της $Α(χ_1,ψ_1)$, $Β(χ_2,ψ_2)$ οπότε $λ = \dfrac{ψ_2 - ψ_1}{x_2 - x_1}$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 5.02.3

☑ **<u>Πώς βρίσκουμε την εφαπτόμενη ευθεία της C_f στο $χ=χ_ο$.</u>**

Γνωρίζοντας τον τύπο της f, ένα τυχαίο σημείο Α(α,β) της ευθείας αλλά όχι το $χ = χ_ο$

i.. Στον τύπο $ε: \quad ψ - f(x_o) = f΄(x_o)(x - x_o)$ (1) της εφαπτόμενης ευθείας, αντικαθιστούμε τα (α,β) μιας και τον επαληθεύουν .

ii.. Αντικαθιστούμε στην (1) και τους τύπους των $f(x_o)$ και $f΄(x_o)$ και βρίσκουμε το $χ_ο$.

iii.. Θέτουμε το $χ=χ_ο$ στην (1) και έχουμε την εφαπτόμενη ευθεία.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 5.02.4

☑ **Όταν έχουμε ασκήσεις που θέλουμε:**

Να δείξουμε ότι μία δεδομένη ευθεία ε: ψ= g(x) είναι εφαπτόμενη στην γραφική παράσταση συνάρτηση f.

Ασκήσεις όπως το παράδειγμα 9 τότε:

Α) Πρέπει ευθεία και συνάρτηση να έχουν ένα τουλάχιστον κοινό σημείο $\chi=\chi_o$ Άρα αν δεν γνωρίζουμε το σημείο αυτό, λύνουμε την εξίσωση $f(x)=\psi=g(x)$ ώστε να το βρούμε.

Β) Σε κάποιο από τα κοινά σημεία που βρήκατε στο (Α) πρέπει ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτόμενης ευθείας στο κοινό σημείο τους δηλαδή στο χ_o (δηλαδή το $f'(x_o)$) να είναι ίδιος με αυτόν της ευθείας, αρκεί λοιπόν να ισχύει $f'(x_o)=\lambda_\psi$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 5.02.5

☑ **Πως αποδεικνύουμε ότι δύο συναρτήσεις f , g έχουν κοινή εφαπτόμενη στο κοινό σημείο τους $\chi=\chi_o$.**

i) Πρώτα βρίσκουμε τα σημεία τομής των δύο συναρτήσεων, εκτός και αν μας δίνεται το κοινό σημείο τους οπότε δείχνουμε ότι τις επαληθεύει.

ii) Αποδεικνύουμε ότι στο κοινό σημείο τους έχουν ίδια παράγωγο

Αρα οι σχέσεις στις ασκήσεις αυτές αν στο $\chi=\chi_o$ έχουμε κοινό σημείο είναι δύο: $f(x_o)=g(x_o)$ και $f'(x_o)=g'(x_o)$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 5.02.6

☑ **Πως εργαζόμαστε όταν δύο συναρτήσεις f , g έχουν κοινή εφαπτόμενη σε διαφορετικά σημεία τους.**

i) Η εφαπτόμενη της f στο x = x_1 είναι $\psi = f'(x_1)\cdot x - f'(x_1)\cdot x_1 + f(x_1)$
η εφαπτόμενη της g στο x = x_2 είναι $\psi = g'(x_2)\cdot x - g'(x_2)\cdot x_2 + g(x_2)$.

ii) Οι ευθείες αυτές πρέπει να ταυτίζονται άρα οι σχέσεις που επιλύουν ο πρόβλημα θα είναι οι:

$f'(x_1) = g'(x_2)$ (1) και $-g'(x_2)\cdot x_2 + g(x_2) = -f'(x_1)\cdot x_1 + f(x_1) \underset{(1)}{\Leftrightarrow}$

$g(x_2) - f'(x_1)\cdot x_2 = f(x_1) - f'(x_1)\cdot x_1$

Στην επόμενη ενότητα ακολουθούν παραδείγματα όλων των μεθοδολογιών που περιγράφονται παραπάνω.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 6.01.2

☑ Απόδειξη ύπαρξης ρίζας της f(x) = 0 με χρήση του Rolle.

Όταν δεν εφαρμόζεται το θεώρημα Bolzano ή δεν μπορούμε να αποδείξουμε την ύπαρξη ρίζας με το σύνολο τιμών χρησιμοποιούμε το θεώρημα Rolle ως εξής:

i) Θεωρούμε σαν συνάρτηση την F παράγουσα της f σε κατάλληλο διάστημα Δ.

ii) Αποδεικνύουμε ότι ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle, συνεπώς υπάρχει $\xi \in \Delta$ τέτοιο ώστε $F'(\xi)=0 \Leftrightarrow f(\xi)=0$, άρα αποδεικνύουμε ότι $\xi \in \Delta$ είναι και ρίζα της $f(x)=0$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 6.01.3

☑ Απόδειξη ύπαρξης περισσοτέρων ριζών δύο, τρείς κ.ο.κ της f(x) = 0 ή της f΄(x) = 0.

Εφαρμόζουμε τα ίδια με την **μέθοδο 6.01.2** αν θέλουμε την απόδειξη ύπαρξης περισσοτέρων ριζών δύο, τρείς κ.ο.κ . Η εφαρμογή γίνεται σε περισσότερα διαστήματα που η επιλογή τους γίνεται με βάση τα δεδομένα της άσκησης. Πρέπει όμως βοηθητικά να αναφέρουμε το εξής:

Αν η εξίσωση f΄(x) = 0 έχει **κ διακεκριμένες ρίζες** τότε η εξίσωση f(x) = 0 θα έχει **κ + 1 το πολύ διακεκριμένες ρίζες,** γιατί ανάμεσα από δύο διαδοχικές ρίζες της f(x) = 0 θα υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα της f΄(x) = 0 λόγω του θεωρήματος Rolle.

Παρατήρηση

ΠΑ6.01.4 Πολλές φορές απαιτείται και η χρήση βοηθητικής συνάρτησης για την οποία θα εφαρμόζουμε το θεώρημα Rolle. Η εύρεση της συνάρτησης αυτής (παράγουσας) δεν είναι εύκολη και απαιτεί μεγάλη εξάσκηση. Θα αναφέρουμε μερικές χρήσιμες βοηθητικές συναρτήσεις.

Α) Αν θέλουμε την ύπαρξη ξ ώστε $f'(\xi)-\alpha=0$ χρησιμοποιούμε στο Rolle την $g(x)=f(x)-\alpha x$

Β) Αν θέλουμε την ύπαρξη ξ ώστε $f'(\xi)+(\xi-\alpha)\cdot f(\xi)=0$ χρησιμοποιούμε στο Rolle την $g(x)=(x-\alpha)\cdot f(x)$

Γ) Αν θέλουμε την ύπαρξη ξ ώστε $f'(\xi)\cdot g(\xi)-f(\xi)\cdot g'(\xi)=0$ χρησιμοποιούμε στο Rolle την $g(x)=\dfrac{f(x)}{g(\xi)}$

Δ) Αν θέλουμε την ύπαρξη ξ ώστε $f'(\xi)+f(\xi)=0$ χρησιμοποιούμε στο Rolle την $g(x)=e^x\cdot f(x)$

Ε) Αν θέλουμε την ύπαρξη ξ ώστε $f'(\xi)-f(\xi)=0$ χρησιμοποιούμε στο Rolle την $g(x)=\dfrac{f(x)}{e^x}$

Παράδειγμα 3. Να δείξετε ότι η εξίσωση $5x^4-8x^3-\lambda x+\lambda=0$ έχει ρίζα στο διάστημα (0,2).

<u>Λύση</u> **Διαβάζουμε πρώτα ➲ ▤ΜΕΘ.6.01.2**

Αν θεωρούσαμε την $f(x)=5x^4-8x^3-\lambda x+\lambda$ στο (0,2) και προσπαθούσαμε να εφαρμόσουμε το Bolzano δεν θα είχαμε το επιθυμητό αποτέλεσμα διότι το $f(0)\cdot f(2)=\lambda(16-\lambda)$ του οποίου δεν γνωρίζουμε το πρόσημο. Άρα θεωρούμε την παράγουσα της f που είναι η:

$F(x)=x^5-2x^4-\dfrac{\lambda}{2}x^2+\lambda x$, $\left(F'(x)=f(x)\right)$ Η F είναι παραγωγίσιμη στο R άρα και στο [0,2] (έτσι συνάγεται και η συνέχεια) και $F(0)=F(2)=0$.

Συνεπώς ισχύει το θεώρημα Rolle για την F και υπάρχει $\xi \in (0,2)$ ώστε $F'(\xi)=0 \Leftrightarrow f(\xi)=0 \Leftrightarrow 5\xi^4 - 8\xi^3 - \lambda\xi + \lambda = 0$.

Παράδειγμα 4. Έστω η άρτια και παραγωγίσιμη στο [-2,2] συνάρτηση f. Να αποδείξετε ότι:

α) η συνάρτηση $g(x)=f(x)\cdot e^{1-2x^2}$ είναι επίσης άρτια και παραγωγίσιμη στο [-2,2].

β) υπάρχει τουλάχιστον ένας $\xi \in (-2,2)$ για τον οποίο ισχύει $f'(\xi) = 4\xi \cdot f(\xi)$.

<u>Λύση</u>

α) Για κάθε $x \in [-2,2]$ και $-x \in [-2,2]$. Έχουμε:

$$g(-x)=f(-x)\cdot e^{1-2(-x)^2} \overset{f\,\text{αρτια}}{=} f(x)\cdot e^{1-2x^2} = g(x)$$

άρα g(x) άρτια για $x \in [-2,2]$ και παραγωγίσιμη με :

$g'(x)=f'(x)\cdot e^{1-2x^2} + f(x)\cdot e^{1-2x^2}(-4x)=[f'(x)-4x\cdot f(x)]\cdot e^{1-2x^2}$ αφού f παραγωγίσιμη στο [-2,2].

β) Η σχέση είναι $f'(\xi) - 4\xi \cdot f(\xi) = 0$ άρα χρειαζόμαστε βοηθητική συνάρτηση (δεν εφαρμόζεται Bolzano) Η συνάρτηση που χρειαζόμαστε είναι η g του προηγούμενου ερωτήματος αφού $g'(x)=[f'(x)-4x\cdot f(x)]\cdot e^{1-2x^2}$. Για τη g ισχύει το Rolle αφού είναι παραγωγίσιμη στο [-2,2] και $g(-2)=g(2)$ διότι η g είναι άρτια συνάρτηση. Υπάρχει λοιπόν $\xi \in (-2,2)$ ώστε $g'(\xi)=0$ άρα

$$[f'(\xi)-4\xi\cdot f(\xi)]\cdot \underbrace{e^{1-2\xi^2}}_{\neq 0} = 0 \Leftrightarrow f'(\xi)-4\xi\cdot f(\xi)=0.$$

Παράδειγμα 5. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e(x-2)\cdot\ln(x+e-1)-e^{x-1}\cdot(x-1)$

Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_o \in (1,2)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο με τετμημένη x_o, να είναι παράλληλη στον άξονα x'x.

<u>Λύση</u>

Αρκεί να αποδείξουμε υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_o \in (1,2)$ ώστε $f'(x_0) = 0$

Είναι $D_f = (1-e,+\infty)$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο [1,2] άρα και συνεχής στο [1,2]. Επίσης είναι f(1) = -e και f(2) = -e άρα από το θ. Rolle υπάρχει