Φροντιστήρια Μέσης Εκπαίδευσης

ΠΥΛΗ

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Κ.Τ Γ΄ΛΥΚΕΙΟΥ

Ζήτημα 1ον

1. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α, β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Αν $f'(x)>0$ στο $(α, x_0)$ και $f'(x)<0$ στο $(x_0, β)$, τότε να αποδείξετε ότι το $f(x_o)$ είναι τοπικό μέγιστο της f.

2. Τι ονομάζουμε οριζόντια ασύμπτωτη συνάρτησης f.

3. Να διατυπώσετε το θεώρημα Μέσης Τιμής.

4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν,γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι *λανθασμένη*.

α) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης –f είναι συμμετρική, ως προς τον άξονα x΄x, της γραφικής παράστασης της f,

β) Η διανυσματική ακτίνα του αθροίσματος των μιγαδικών α+βi και γ+δi είναι το άθροισμα των διανυσματικών ακτίνων τους.

γ) Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0, τότε δεν μπορεί να είναι παραγωγίσιμη στο x_0 .

δ) Ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = +\infty$

ε) Αν $f''(x_o)=0$ τότε στο $x=x_o$ έχουμε Σημείο Καμπής της f.

Ζήτημα 2ον

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z, με $z \neq -1$ για τους οποίους ο αριθμός $w=\dfrac{z-1}{z+1}$ είναι φανταστικός. Να αποδείξετε ότι:

i) $|z| = 1$

ii) Ο αριθμός $\left(z - \frac{1}{z}\right)^4$ είναι πραγματικός,

iii) Ισχύει $\left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}\right)(z_1 + z_2) \le 4$ όπου z_1, z_2 δύο από τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς z.

iv) Οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών u, για τους οποίους ισχύει $u - ui = \frac{i}{w} - w$, $w \neq 0$ ανήκουν σε υπερβολή.

Ζήτημα 3ον

Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = x^{\alpha}$, $x > 0$.

i) Αν η συνάρτηση g στρέφει τα κοίλα κάτω και $\alpha \neq 0, \alpha \neq 1$, να δείξετε ότι η g είναι γνησίως αύξουσα.

ii) Να βρεθεί το όριο $\lim\limits_{\alpha \to +\infty} \frac{g(3)+g(4)}{g(3)-g(5)}$

iii) Να βρείτε το $\alpha \in R$ αν $\alpha \cdot \int_0^1 \left[g(9) - g(3)\right] \cdot d\alpha = \frac{4}{\ell n 3}$

iv) Να λυθεί η εξίσωση $g(3) + g(4) = g(2) + g(5)$ με $\alpha \in R$

Ζήτημα 4ον

Έστω συνάρτηση f συνεχής στο R με $f(x) > 0$ και έστω $g(x) = \int_0^1 t \cdot f(xt)\,dt$, $t.x \in R$, να δείξετε ότι:

i) $g(0) = \frac{f(0)}{2}$

ii) Η $g(x) = \frac{1}{x^2} \cdot \int_0^x t \cdot f(t)\,dt$, $x \in R^*$ και ότι η g είναι συνεχής στο R,

iii) Να γράψετε την g΄ συναρτήσει της g και της f για $x \in R^*$,

iv) Ισχύει $x \cdot g(x) < \int_0^x f(t)\,dt$ για κάθε χ>0

v) Αν $\int_1^2 t \cdot f(t)\,dt = 3\int_0^1 t \cdot f(t)\,dt$ τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_1 \in (1,2)$ τέτοιο ώστε: $2g(x_1) = f(x_1)$