Φροντιστήρια Μέσης Εκπαίδευσης

ΠΥΛΗ

Διαγώνισμα Μαθηματικά Κατεύθυνσης Γ΄ Λυκείου

Ζήτημα 1ον

1.. Έστω δυο συναρτήσεις f, g ορισμένες σε ένα διάστημα Δ. Αν οι f, g είναι

- συνεχείς στο Δ και
- f΄(x) = g΄(x) για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ, να αποδείξετε ότι υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε για κάθε $x \in \Delta$ να ισχύει: f(x) = g(x) + c

Μονάδες 8

2.. Πότε λέμε ότι μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της.

Μονάδες 7

3.. Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις επόμενες προτάσεις ως Σωστή (Σ) ή Λανθασμένη (Λ):

i) Η εξίσωση $|z-z_1|-|z-z_2|=0$ παριστάνει τη μεσοκάθετο του τμήματος με άκρα τα σημεία $A(z_1)$ και $B(z_2)$.

ii) Αν η f είναι συνεχής στο [α, β] τότε η f έχει υποχρεωτικά ολικά ακρότατα τα f(α) και f(β).

iii) Αν $0<\alpha<1$ τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\alpha^x=0$

iv) Αν για κάθε στοιχείο ψ του συνόλου τιμών της f(x), η f(χ)=ψ έχει λύση ως προς x τότε η f είναι 1-1.

v) Αν $z_1^2+z_2^2=0$ και $z_1, z_2 \in C$ τότε ισχύει ότι $z_1=z_2=0$

Μονάδες 10

Ζήτημα 2ον

Δίνεται η εξίσωση $z^2-z+1=0$ με ρίζες τους μιγαδικούς z_1, z_2

i) Να δείξετε ότι $z_1+z_2=z_1\cdot z_2=1$ και $z_1^3=-1$

Μονάδες 5

ii) Να δείξετε ότι $z_1^{2014}+z_2^{2014}=-1$

Μονάδες 6

iii) Αν Α,Β οι εικόνες των μιγαδικών z_1^{10} και z_2^{10} αντίστοιχα και Ο η αρχή των αξόνων, να δείξετε ότι το τρίγωνο ΑΟΒ είναι ισόπλευρο.

Μονάδες 7

iv) Αν για ένα μιγαδικό w ισχύει $\left|\dfrac{w}{2i}-\dfrac{1}{2}\right| = z_2^{12}$, να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του w και να δείξετε ότι ο $u = w - i + \dfrac{4}{w-i} \in R$ και $u \in [-4,4]$

Μονάδες 7

<u>Ζήτημα 3^ον^</u>

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f ορισμένη στο $(0,+\infty)$ για την οποία ισχύει ότι:

$$f(x) - 1 = x - \int_1^{\frac{1}{x}} f(xt)\,dt \;,$$

i) Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$

Μονάδες 5

ii) Να βρείτε τον τύπο της f και να δείξετε ότι είναι 1-1 συνάρτηση

Μονάδες 7

iii) Να λυθεί η εξίσωση $(x+1)\cdot e^{2(x+1)} = 2x \cdot e^{4x}$

Μονάδες 6

iv) Να βρεθεί το εμβαδόν μεταξύ της γραφικής παράστασης της f, της εφαπτομένης της στο x=1 και της ευθείας x=2

Μονάδες 7

<u>Ζήτημα 4^ον^</u>

Αν η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[0,+\infty)$ με $f(0) = f'(0) = 1$ και ισχύει $(f'(x))^2 + f(x)\cdot f''(x) = f(x).f'(x)$.

i) Αν $h(x) = f(x)\cdot f'(x)$ να βρείτε τον τύπο της h.

Μονάδες 6

ii) Να δείξετε ότι $f^2(x) = 2e^x - 1$, $x \geq 0$.

Μονάδες 7

iii) Ν' αποδειχθεί ότι: $\dfrac{1}{2e+1} \leq \displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{f^2(t)+2} \leq \frac{1}{3}$.

Μονάδες 6

iv) Ν' αποδειχθεί ότι η εξίσωση: $2x - \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{f^2(t)+2} = 1$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο (0,1).

Μονάδες 6