

**Διαγώνισμα Μαθηματικά Γενικής Παιδείας Γ' Λυκείου**

**Ζήτημα 1<sup>ο</sup>**

1.. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση  $f$  με πεδίο ορισμού το  $A$  παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο  $x = x_0$ ;

**Μονάδες 5**

2.. Τι μας δίνουν τα μέτρα διασποράς ή μεταβλητότητας μιας κατανομής ενός συνόλου δεδομένων;

**Μονάδες 5**

3.. Να γραφεί και να αποδειχθεί ο Προσθετικός Νόμος των Πιθανοτήτων.

**Μονάδες 5**

4.. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

- i) Η αθροιστική συχνότητα  $N_i$  μιας τιμής  $x_i$  εκφράζει το πλήθος των παρατηρήσεων που είναι μικρότερες της τιμής  $x_i$
- ii) Αν η διάμεσος  $v$  παρατηρήσεων δεν είναι ίση με μία από αυτές τότε είναι βέβαιο ότι το πλήθος  $v$  των παρατηρήσεων είναι άρτιος αριθμός.
- iii) Αν για δύο ενδεχόμενα ενός Δειγματικού χώρου ισχύει ότι  $P(A \cup B) = 1$  τότε  $B = A'$
- iv) Ισχύει ότι μία γνησίως μονότονη συνάρτηση στο  $\Delta$  δεν μπορεί να έχει ακρότατα στο  $\Delta$ .

v) Ισχύει ότι  $\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) = 0$

**Μονάδες 10**

**Ζήτημα 2<sup>ο</sup>**

Σε μια εταιρεία με 400 υπαλλήλους πραγματοποιήθηκαν σε διαφορετικές ημερομηνίες δυο σεμινάρια επαγγελματικής κατάρτισης, το σεμινάριο A και το

σεμινάριο Β. Κάθε υπάλληλος ήταν υποχρεωμένος να παρακολουθήσει τουλάχιστον ένα από τα δυο σεμινάρια. Από τους 400 υπαλλήλους είναι γνωστό ότι 340 παρακολούθησαν το σεμινάριο Α και 240 το σεμινάριο Β. Επιλέγουμε τυχαία έναν υπάλληλο της παραπάνω εταιρείας.

i) να δείξετε ότι τα ενδεχόμενα Α και Β δεν είναι ασυμβίβαστα.

**Μονάδες 5**

ii) Να δείξετε ότι  $P(A \cap B) = \frac{9}{20}$

**Μονάδες 6**

iii) Να βρείτε την πιθανότητα ο υπάλληλος να παρακολουθήσει ακριβώς ένα από τα δυο σεμινάρια.

**Μονάδες 7**

iv) Αν  $f(x) = (x - P(B))^3 - (x - P(A))^3$  να δείξετε ότι  $f(0) > 0$

**Μονάδες 7**

### Ζήτημα 3<sup>ο</sup>

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \ln^2(ax) + \beta$ ,  $x > 0$  και η εφαπτομένη της  $f$  στο  $x=1$  είναι ο άξονας  $xx'$ . Δίνονται και δύο ενδεχόμενα Α, Β ενός δειγματικού χώρου  $\Omega$  για τα οποία γνωρίζουμε ότι δεν είναι αδύνατα και επίσης  $P(A - B) = 0$ ,

i) Να αποδείξετε ότι  $\alpha=1$  και  $\beta=0$

**Μονάδες 7**

ii) Να μελετήσετε την  $f$  ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα,

**Μονάδες 5**

iii) Να αποδείξετε ότι  $f(P(A)) \geq f(P(B))$

**Μονάδες 6**

iv) Δίνεται και η συνάρτηση  $g(x) = \sqrt{f(x)}$  με  $x \geq 1$ , και 10 τιμές της  $g(x_1), g(x_2), \dots, g(x_{10})$  με  $x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_{10} = e^{20}$ , αν οι τιμές αυτές ακολουθούν κανονική κατανομή να δείξετε ότι  $x_5 \cdot x_6 = e^4$

**Μονάδες 7**

### Ζήτημα 4<sup>ο</sup>

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{(t_1 - x)^3 + (t_2 - x)^3 + \dots + (t_v - x)^3}{v}$  και  $t_1, t_2, \dots, t_v$

παρατηρήσεις ενός δείγματος με μέση τιμή  $\bar{t} = 10$

i) Να δείξετε ότι  $f'(10) = -3s^2$  όπου  $s$  η τυπική απόκλιση των τιμών  $t_1, t_2, \dots, t_n$

**Μονάδες 6**

ii) Αν  $f''(2) = 4,8 \cdot n$  να βρεθεί το μέγεθος του δείγματος  $n$  και σε ποια τιμή  $x = \alpha$  η  $f$  έχει μέγιστη κλίση,

**Μονάδες 7**

iii) Δίνεται το σύνολο  $A = \left\{0, \frac{n}{10}, \frac{\alpha}{5}, 3\right\}$  όπου  $n, \alpha$  οι τιμές που βρήκατε στο

παραπάνω ερώτημα. Από το σύνολο  $A$  επιλέγουμε τυχαία δύο τιμές  $\gamma, \delta$ , να βρεθεί:

α. Ο Δειγματικός χώρος του πειράματος και

**Μονάδες 5**

β. την πιθανότητα του ενδεχομένου

$$K = \left\{ (\gamma, \delta) \text{ με } \gamma, \delta \in A / \lim_{x \rightarrow \delta} \frac{x^2 + \delta x - 2\delta^2}{\sqrt{x^2 + 3\delta^2} - 2\delta} > \lim_{x \rightarrow \gamma} \frac{\gamma x^3 - \gamma^3}{2x - 2\gamma} \right\}$$

**Μονάδες 7**