Φροντιστήρια Μέσης Εκπαίδευσης ΠΥΛΗ

Διαγώνισμα Μαθηματικά Κατεύθυνσης Γ΄ Λυκείου

Ζήτημα 1ον

1.. Να αποδείξετε ότι, αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0, τότε είναι συνεχής στο σημείο αυτό.

Μονάδες 5

2.. Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $x_o \in A$;

Μονάδες 5

3.. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f (x) = α^x , α > 0 είναι παραγωγίσιμη στο IR. Και ισχύει f ΄(x) = $\alpha^x \cdot \ell n\alpha$

Μονάδες 5

4.. Να βρείτε ποιοι από τους επόμενους ισχυρισμούς είναι αληθείς και ποιοι ψευδείς:

i) Αν δύο μεταβλητά μεγέθη x, y συνδέονται με τη σχέση y = f (x), όταν f είναι μια συνάρτηση παραγωγίσιμη στο x_0, τότε ο ρυθμός μεταβολής του y ως προς x στο σημείο x_0 είναι η παράγωγος y = f ΄(x_0).

ii) Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ, τότε τα εσωτερικά σημεία x_0 του Δ, στα οποία f ΄(x_0) $\neq$ 0, δεν είναι θέσεις τοπικών ακρότατων της f.

iii) Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο σημείο x_o του πεδίου ορισμού της, τότε δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_o.

iv) Ισχύει ότι $i^{4v+2} = 1$

v) Αν στο $x = x_o$ του πεδίου ορισμού παραγωγίσιμης συνάρτησης f ισχύει ότι $f'(x_o) = 0$ τότε στο $x = x_o$ η συνάρτηση έχει ακρότατο.

Μονάδες 10

Ζήτημα 2ον

Δίνεται η εξίσωση $z^2 - 4z \cdot \eta\mu\theta + 4 = 0$, **(1)** $z \in C$, $\theta \in R$

i) Να λυθεί η εξίσωση

Μονάδες 6

ii) Να δείξετε ότι οι εικόνες των ριζών της **(1)**, στο μιγαδικό επίπεδο κινούνται πάνω σε κύκλο.

Μονάδες 6

iii) Αν $w \in C$ και $\left|w-2\sqrt{3}\right|+\left|w+2\sqrt{3}\right|=8$ να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του w.

Μονάδες 6

iv) Να λυθεί η εξίσωση $z=w$ και να δείξετε ότι $0 \le |z+w| \le 6$

Μονάδες 7

Ζήτημα 3^{ον}

Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις f,g στο R με $f(x)=3e^{2x}-3$ και

$f(x) \ge 3\int_0^2 x \cdot g(2x+t)dt$ για κάθε $x \in R$ επίσης $g(0)=\frac{1}{2}$, και g παραγωγίσιμη

στο $x=0$ με $g'(0)=4$

i) Να δείξετε ότι $\int_0^2 g(t)dt=2$

Μονάδες 7

ii) Υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_o \in (0,2)$, τέτοιο ώστε $\int_0^{x_o} g(t)dt=1$

Μονάδες 5

iii) Δίνεται η συνάρτηση $F(x)=2\int_0^x g(t)dt-x-2$, να αποδείξετε ότι η F είναι παραγωγίσιμη, να βρείτε την παράγωγο της και να δείξετε ότι η εξίσωση $F(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον θετική λύση.

Μονάδες 6

iv) Να βρεθεί το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\frac{F(x)+x^2+2}{x^3-x^2}$

Μονάδες 7

Ζήτημα 4^{ον}

Έστω δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση f ορισμένη στο $(0,+\infty)$ με $f'(x) \ne 0$

και ισχύει ότι $f(f'(x))+f(x)=0$, $x \in (0,+\infty)$ και $f(1)=0$.

i) Να βρείτε το $f'(1)$ και να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση,

Μονάδες 5

ii) Να δείξετε ότι $f'(f'(x)) = x$, $x \in (0,+\infty)$ και να δείξετε ότι $f(x) = \ell n x$

Μονάδες 7

iii) Για ποιες τιμές του λ η εξίσωση $f(x) = x + \lambda$ έχει δύο ακριβώς λύσεις

Μονάδες 7

iv) Να βρεθεί το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\eta\mu x + f(x)}{\sigma\upsilon\nu x + f(x)}$

Μονάδες 6