

# ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ & ΕΠΑ.Λ. Β'

25 ΜΑΪΟΥ 2015

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

## ΘΕΜΑ Α

**A1.** Έστω μια συνάρτηση  $f$ , η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα  $[α, β]$ .  
Αν η

- $f$  είναι συνεχής στο  $[α, β]$  και
- $f(α) \neq f(β)$ ,

τότε να αποδείξετε ότι για κάθε αριθμό  $\eta$  μεταξύ των  $f(α)$  και  $f(β)$  υπάρχει ένας τουλάχιστον  $x_0 \in (α, β)$ , τέτοιος ώστε  $f(x_0) = \eta$ .

**Μονάδες 7**

**A2.** Έστω μια συνάρτηση  $f$  και  $x_0$  ένα σημείο του πεδίου ορισμού της. Πότε θα λέμε ότι η  $f$  είναι συνεχής στο  $x_0$ ;

**Μονάδες 4**

**A3.** Έστω μια συνάρτηση  $f$  με πεδίο ορισμού  $A$ . Πότε λέμε ότι η  $f$  παρουσιάζει στο  $x_0 \in A$  τοπικό ελάχιστο;

**Μονάδες 4**

**A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

- α)** Αν για δύο συναρτήσεις  $f, g$  ορίζονται οι συναρτήσεις  $f \circ g$  και  $g \circ f$ , τότε ισχύει πάντοτε ότι  $f \circ g = g \circ f$ .
- β)** Η διανυσματική ακτίνα της διαφοράς των μιγαδικών  $a + \beta i$  και  $\gamma + \delta i$  είναι η διαφορά των διανυσματικών ακτίνων τους.
- γ)** Για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  ισχύει ότι  $(\sin x)' = \eta \mu x$ .
- δ)** Έστω  $f$  μία συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα  $[α, β]$ . Αν ισχύει ότι  $f(x) \geq 0$  για κάθε  $x \in [α, β]$  και η συνάρτηση  $f$  δεν είναι παντού μηδέν στο διάστημα αυτό, τότε  $\int_a^b f(x) dx > 0$ .
- ε)** Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$  και  $f(x) > 0$  κοντά στο  $x_0$ , τότε  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$ .

**Μονάδες 10**

## ΘΕΜΑ Β

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς  $z$  για τους οποίους ισχύει:

$$|z - 4| = 2 |z - 1|.$$

**B1.** Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων αυτών των μιγαδικών αριθμών  $z$  είναι κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα  $\rho = 2$ .

**Μονάδες 7**

**B2.** Έστω  $w = \frac{2z_1}{z_2} + \frac{2z_2}{z_1}$  όπου  $z_1, z_2$  δύο μιγαδικοί αριθμοί του ερωτήματος B1.

Να αποδείξετε ότι:

α) Ο  $w$  είναι πραγματικός και

(μονάδες 4)

β)  $-4 \leq w \leq 4$ .

(μονάδες 7)

**Μονάδες 11**

**B3.** Αν  $w = -4$ , όπου  $w$  είναι ο μιγαδικός αριθμός του ερωτήματος B2, να βρείτε τη σχέση που συνδέει τους μιγαδικούς αριθμούς  $z_1, z_2$  και να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $AB\Gamma$  με κορυφές τις εικόνες  $A(z_1), B(z_2), \Gamma(z_3)$  των μιγαδικών αριθμών  $z_1, z_2$  και  $z_3 = 2i z_1$ , είναι ισοσκελές.

**Μονάδες 7**

## ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{e^x}{x^2 + 1}, x \in \mathbb{R}$ .

**Γ1.** Να μελετήσετε την  $f$  ως προς τη μονοτονία και να αποδείξετε ότι το σύνολο τιμών της είναι το διάστημα  $(0, +\infty)$ .

**Μονάδες 6**

**Γ2.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$f(e^{3-x} \cdot (x^2 + 1)) = \frac{e^2}{5}$$

έχει στο σύνολο των πραγματικών αριθμών μία ακριβώς ρίζα.

**Μονάδες 8**

**Γ3.** Να αποδείξετε ότι

$$\int_{2x}^{4x} f(t) dt < 2xf(4x)$$

για κάθε  $x > 0$ .

**Μονάδες 4**

**Γ4.** Δίνεται η συνάρτηση

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \int_{2x}^{4x} f(t) dt, & x > 0 \\ 2 & x = 0 \end{cases}$$

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $g$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $[0, +\infty)$ .

**Μονάδες 7**

## ΘΕΜΑ Δ

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύουν:

- $f'(x) \cdot [e^{f(x)} + e^{-f(x)}] = 2$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  και
- $f(0) = 0$ .

**Δ1.** Να αποδείξετε ότι  $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

**Μονάδες 5**

**Δ2. α)** Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση  $f$  είναι κυρτή ή κοίλη και να προσδιορίσετε το σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της  $f$ .

(μονάδες 3)

**β)** Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$ , την ευθεία  $y = x$  και τις ευθείες  $x = 0$  και  $x = 1$ .

(μονάδες 4)

**Μονάδες 7**

**Δ3.** Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left[ \left( e^{\int_0^x f^2(t) dt} - 1 \right) \ln |f(x)| \right].$$

**Μονάδες 6**

**Δ4.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$\frac{1 - 3 \int_0^{x-2} f(t^2) dt}{x-3} + \frac{8 - 3 \int_0^x f^2(t) dt}{x-2} = 0$$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο  $(2, 3)$ .

**Μονάδες 7**