<u>ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΑΛΓΕΒΡΑ)</u>

ΕΠΑ.Λ.

2019

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της ταυτοτικής συνάρτησης $f(x)=x$ είναι $f'(x)=(x)'=1$ για κάθε x στο σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών.

Μονάδες 8

Α2. **α.** Ποιες μεταβλητές λέγονται ποσοτικές; (μον. 3)

β. Πότε μια ποσοτική μεταβλητή ονομάζεται διακριτή και πότε συνεχής; (μον. 4)

Μονάδες 7

Α3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη **Λάθος,** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Ισχύει $\left(\dfrac{1}{x}\right)'=\dfrac{1}{x^2}$, $x\in\mathbb{R}-\{0\}$.

β Ισχύει $\big(f\big(g(x)\big)\big)'=f'\big(g(x)\big)\cdot g'(x)$, όπου f,g παραγωγίσιμες συναρτήσεις.

γ. Ο σταθμικός μέσος είναι μέτρο διασποράς.

δ. Σε κυκλικό διάγραμμα συχνοτήτων, αν a_i συμβολίζει το τόξο του κυκλικού τμήματος που αντιστοιχεί στη συχνότητα v_i, τότε $a_i=\dfrac{v}{v_i}\cdot 360°$ για $i=1,2,\dots,\kappa$ και v το μέγεθος του δείγματος.

ε. Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(1)=l_1$ και $\lim\limits_{x\to x_0} g(1)=l_2$, όπου l_1, l_2 πραγματικοί αριθμοί, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}\big(f(x)g(x)\big)=l_1 l_2$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Οι τιμές ενός δείγματος είναι 11, 7, κ, 13, 11, 10 όπου $\kappa > 0$. Ο συντελεστής μεταβολής του δείγματος είναι $CV = 20\%$ και η διακύμανσή του είναι $s^2 = 4$.

Β1. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή $\bar{x}$ του παραπάνω δείγματος.

Μονάδες 5

Β2. Αν $\bar{x}=10$, να υπολογίσετε την τιμή του πραγματικού αριθμού κ.

Μονάδες 7

Β3. Αν $\kappa = 8$, να υπολογίσετε τη διάμεσο *(δ)* (μον. 4) και το εύρος *(R)* (μον. 2) του παραπάνω δείγματος.

Μονάδες 6

Β4. Αν από κάθε τιμή του παραπάνω δείγματος αφαιρεθεί ο αριθμός 2, να εξετάσετε αν το δείγμα των νέων τιμών είναι ομοιογενές (μον. 5) και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας (μον. 2).

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 10},\ x \in \mathbb{R}\,.$$

Γ1. Να δείξετε ότι $f'(x) = \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2 - 2x + 10}}$.

Μονάδες 3

Γ2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία (μον. 5) και να δείξετε ότι $f(x) \geq 3$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. (μον. 6).

Μονάδες 11

Γ3. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης ε της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $M(5, f(5))$.

Μονάδες 6

Γ4. Αν A, B είναι τα σημεία τομής της εφαπτομένης ε με τους άξονες $x'x$ και $y'y$ αντίστοιχα, να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων A (μον. 3) και B (μον. 2).

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + \lambda x, \text{ όπου } \lambda \in \mathbb{R} \text{ σταθερά.}$$

Δ1. Για $\lambda = 3$ να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία (μον. 4) και να συγκρίνετε τους αριθμούς $f\left(\dfrac{3}{8}\right)$ και $f\left(\dfrac{5}{6}\right)$ (μον. 3).

Μονάδες 7

Δ2. Για $\lambda = 3$ να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x \to 1} \frac{f'(x)}{\left(\sqrt{x} - 1\right) \cdot \left(x^2 - x\right)}\,.$$

Μονάδες 7

Δ3. Για $\lambda = 3$ να βρείτε το σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f, στο οποίο η εφαπτομένη έχει τον ελάχιστο συντελεστή διεύθυνσης.

Μονάδες 6

Δ4. Να βρείτε τη μικρότερη τιμή του λ για την οποία η συνάρτηση f δεν παρουσιάζει ακρότατα.

Μονάδες 5

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. **α.** Θεωρία, σχολικό βιβλίο σελ. 28.
Α2. **α.** Θεωρία, σχολικό βιβλίο σελ. 59.
β. Θεωρία, σχολικό βιβλίο σελ. 59.
Α3. **α.** Λάθος (Λ)
β. Σωστό (Σ)
γ. Λάθος (Λ)
δ. Λάθος (Λ)
ε. Σωστό (Σ)

ΘΕΜΑ Β

Β1. Είναι $s=\sqrt{s^2}=\sqrt{4}=2$.

Έτσι από τον τύπο $\dfrac{s}{\overline{x}}=CV$ έχουμε $\dfrac{2}{\overline{x}}=0,2\Leftrightarrow \overline{x}=\dfrac{2}{0,2}\Leftrightarrow \overline{x}=10$

Β2. Είναι

$$\frac{11+7+\kappa+13+11+10}{6}=\overline{x}\Leftrightarrow \frac{52+\kappa}{6}=10\Leftrightarrow 52+\kappa=60\Leftrightarrow \kappa=8$$

Β3. Με $\kappa=8$ οι τιμές του δείγματος σε αύξουσα σειρά είναι: 7, 8, 10, 11, 11, 13. Επειδή το πλήθος του δείγματος είναι 6 (άρτιος) η διάμεσος ισούται με το ημιάθροισμα των δύο μεσαίων παρατηρήσεων. Δηλαδή $\delta=\dfrac{10+11}{2}=10,5$.

Εύρος**:** $R=13-7=6$.

Β4. Εάν από κάθε τιμή του δείγματος αφαιρεθεί ο αριθμός 2 οι τιμές γίνονται: 5, 6, 8, 9, 9, 11. Τότε η νέα μέση τιμή $\overline{x}_1=\dfrac{5+6+8+9+9+11}{6}=\dfrac{48}{6}=8$.

Ενώ η νέα τιμή για την τυπική απόκλιση:

$$S_1=\sqrt{\frac{(5-8)^2+(6-8)^2+(8-8)^2+(9-8)^2+(9-8)^2+(11-8)^2}{6}}=$$

$$=\sqrt{\frac{9+4+1+1+9}{6}}=\sqrt{\frac{24}{6}}=\sqrt{4}=2.$$

Τότε ο νέος συντελεστής μεταβλητότητας γίνεται:

$$CV_1=\frac{S_1}{\overline{x}_1}=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}=0,25>0,1.$$

Από το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

<u>Β τρόπος:</u>

Από εφαρμογή του σχολικού βιβλίου οι νέες τιμές για τη μέση τιμή $\overline{x_1}$ και τυπική απόκλιση S_1 θα είναι

$\overline{x_1} = \overline{x} - 2 = 8$

$S_1 = S = 2$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η f είναι παραγωγίσιμη ως ρίζα πολυωνυμικής με:

$$f'(x) = \left(\sqrt{x^2 - 2x + 10}\right)' = \frac{\left(x^2 - 2x + 10\right)'}{2\sqrt{x^2 - 2x + 10}} = \frac{2x - 2}{2\sqrt{x^2 - 2x + 10}} = \frac{x - 1}{\sqrt{x^2 - 2x + 10}}$$

Γ2. Επειδή $\sqrt{x^2 - 2x + 10} > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, το πρόσημο και οι ρίζες της $f\,'(x)$ δίνονται από το πρόσημο και τις ρίζες του αριθμητή $x - 1$.

Έτσι

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$

$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x - 1 < 0 \Leftrightarrow x < 1$

Δηλαδή έχουμε τον πίνακα μεταβλητών:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f'		−	0	+	
f		↘	min	↗	

Προκύπτει έτσι ότι:

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 1]$.

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$.

Η f έχει ελάχιστη τιμή $f(1) = \sqrt{1^2 - 2 \cdot 1 + 10} = \sqrt{9} = 3$.

για $x = 1$. Άρα $f(x) \geq f(1) \Leftrightarrow f(x) \geq 3$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Γ3. Η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της C_f στο σημείο $\mathrm{M}\left(5, f(5)\right)$ έχει εξίσωση της μορφής $y = \lambda x + \beta$, όπου $\lambda = f'(5) = \dfrac{5 - 1}{\sqrt{5^2 - 2 \cdot 5 + 10}} = \dfrac{4}{\sqrt{25}} = \dfrac{4}{5}$.

Η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) έτσι γίνεται $y = \dfrac{4}{5}x + \beta$.

Όμως η (ε) διέρχεται και από το σημείο $\mathrm{M}\left(5, f(5)\right)$

άρα $f(5)=\frac{4}{5}\cdot 5+\beta \Leftrightarrow 5=4+\beta \Leftrightarrow \beta=1$.

Άρα η (ε) έχει εξίσωση $y=\frac{4}{5}x+1$.

Γ4. Στην (ε) θέτουμε $x=0$ οπότε $y=1$. Έτσι παίρνουμε το σημείο $B(0,\ 1)$ στο οποίο η (ε) τέμνει τον $y'y$.

Αν τώρα θέσουμε $y=0$, παίρνουμε $\frac{4}{5}x+1=0 \Leftrightarrow 4x+5=0 \Leftrightarrow 4x=-5 \Leftrightarrow x=-\frac{5}{4}$.

Έτσι βρίσκουμε το σημείο $A\left(-\frac{5}{4},0\right)$ στο οποίο η (ε) τέμνει τον $x'x$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η συνάρτηση f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη σε όλο το $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική με:

$f'(x)=\left(x^3-3x^2+\lambda x\right)'=3x^2-6x+\lambda,\ x\in\mathbb{R}$.

Για $\lambda=3$ είναι $f'(x)=3x^2-6x+3=3\left(x^2-2x+1\right)=3\left(x-1\right)^2$.

Προκύπτει ότι $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=1$, όμως η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στα διαστήματα $\left(-\infty,1\right)$ και $\left(1,+\infty\right)$. Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f'		$+$	0	$+$	
f			$\nearrow$		

Είναι $\frac{3}{8}=\frac{2}{24}$ και $\frac{5}{6}=\frac{20}{24}$, οπότε $\frac{3}{8}<\frac{5}{6}$ και επειδή f είναι γνησίως αύξουσα προκύπτει $f\left(\frac{3}{8}\right)<f\left(\frac{5}{6}\right)$.

Δ2. Για $\lambda=3$, είναι:

$$\frac{f'(x)}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(x^2-x\right)}=\frac{3x^2-6x+3}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(x^2-x\right)}=\frac{3\left(x^2-2x+1\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)x\left(x-1\right)}=\frac{3\left(x-1\right)^2}{\left(\sqrt{x}-1\right)x\left(x-1\right)}=$$

$$=\frac{3\left(x-1\right)}{x\left(\sqrt{x}-1\right)}=\frac{3\left(x-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}{x\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}=\frac{3\left(x-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}{x\left(x-1\right)}=\frac{3\left(\sqrt{x}+1\right)}{x}$$

Έτσι

$$\lim_{x\to1}\frac{f'(x)}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(x^2-1\right)}=\lim_{x\to1}\frac{3\left(\sqrt{x}+1\right)}{x}=\frac{3\left(\sqrt{1}+1\right)}{1}=6$$

Δ3. Για $\lambda = 3$ είναι $f(x)=x^3-3x^2+3x$ και $f'(x)=3x^2-6x+3=3\left(x^2-2x+1\right)=3\left(x-1\right)^2$.
Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης σε ένα σημείο με τετμημένη x_0 ισούται με $\lambda=f'(x_0)=3\left(x_0-1\right)^2$. Όμως $3\left(x_0-1\right)^2\geq 0$ με ελάχιστη τιμή την τιμή $\lambda=0$ για $x_0=1$.
Δηλαδή στο το σημείο στο οποίο η εφαπτομένη έχει τον ελάχιστο συντελεστή διεύθυνσης είναι το $A\left(1, f(1)\right)$ δηλαδή το $A\left(1,1\right)$.

Δ4. Για $\lambda\in\mathbb{R}$ είναι $f'(x)=3x^2-6x+\lambda,\ x\in\mathbb{R}$.
Δηλαδή η f' είναι τριώνυμο του οποίου οι ρίζες και το πρόσημο εξαρτώνται από την διακρίνουσα $\Delta=\left(-6\right)^2-4\cdot3\cdot\lambda=36-12\lambda$.

α. Αν $\Delta>0\Leftrightarrow 36-12\lambda>0\Leftrightarrow -12\lambda>-36\Leftrightarrow \lambda<3$
τότε η f' έχει δύο ρίζες x_1,x_2 με $x_1<x_2$ και προκύπτει ο επόμενος πίνακας μεταβολών

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
f'		+	0	−	0	+	
f		↗	max	↘	min	↗	

β. $\Delta=0\Leftrightarrow 36-12\lambda=0\Leftrightarrow\lambda=3$. Τότε η f' έχει μία ρίζα διπλή και όπως απαντήθηκε στο ερώτημα Δ1, η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και δεν παρουσιάζει ακρότατα.

γ. Αν $\Delta<0\Leftrightarrow 36-12\lambda<0\Leftrightarrow\lambda>3$: Τότε η f' δεν έχει ρίζες και προκύπτει ο επόμενος πίνακας:

x	$-\infty$		$+\infty$
f'		+	
f		↗	

Η f δεν παρουσιάζει ακρότατα.
Από α, β, γ προκύπτει ότι η f δεν παρουσιάζει ακρότατα για $\lambda\geq3$. Δηλαδή η μικρότερη τιμή για την οποία δεν παρουσιάζει ακρότατα είναι $\lambda=3$.