

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΕΠΑ.Λ. Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

2010

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α.

A1. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 5

A2. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή ή τη λέξη **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Η μέση τιμή δεν επηρεάζεται από τις ακραίες τιμές της μεταβλητής.

β) Αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ και είναι $\ell \in \mathbb{R}$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = |\ell|$.

γ) Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0 .

δ) Ισχύει ότι: $\int_a^a f(x) dx = a$, για κάθε $a \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 12

A3. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τις παρακάτω ισότητες και να τις συμπληρώσετε:

α) $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \dots\dots\dots$, με $g(x) \neq 0$.

β) $(\sqrt{x})' = \dots\dots\dots$, με $x > 0$.

γ) $(e^x)' = \dots\dots\dots$

δ) $(\sin x)' = \dots\dots\dots$

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Β.

Οι ημέρες απουσίας 50 υπαλλήλων μιας εταιρείας από την εργασία τους, τον περασμένο μήνα, φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

Ημέρες απουσίας x_i	Υπάλληλοι n_i	Σχετική Συχνότητα f_i %	Αθροιστική Συχνότητα	Αθροιστική Σχετική Συχνότητα %	$x_i n_i$
0	8				
1	10				
2					
3	10				
4	5				
5	2				
Αθροίσματα					

- B1.** Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον πίνακα και να τον συμπληρώσετε. **Μονάδες 10**
- B2.** Να υπολογίσετε τη μέση τιμή της μεταβλητής x . **Μονάδες 5**
- B3.** Να υπολογίσετε τη διάμεσο της μεταβλητής x . **Μονάδες 5**
- B4.** Να βρείτε το πλήθος και το ποσοστό των υπαλλήλων που απουσίασαν από 2 έως και 4 ημέρες. **Μονάδες 5**

ΘΕΜΑ Γ.

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 1}, & x < 1 \\ \sqrt{x+3} + \alpha, & x \geq 1, \text{ όπου } \alpha \in \mathbb{R} \end{cases}$$

- Γ1.** Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$. **Μονάδες 7**
- Γ2.** Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$. **Μονάδες 7**
- Γ3.** Να υπολογίσετε τον πραγματικό αριθμό α , ώστε η f να είναι συνεχής στο $x_0 = 1$. **Μονάδες 5**
- Γ4.** Για $\alpha = -3$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A = 3f(0) + 2f(6)$. **Μονάδες 6**

ΘΕΜΑ Δ.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + \alpha x + \beta$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο σημείο $x_0=2$ και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(0,1)$, τότε:

Δ1. Να βρείτε τις τιμές των πραγματικών αριθμών α και β .

Μονάδες 8

Δ2. Για $\alpha=6$ και $\beta=1$, να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

Μονάδες 6

Δ3. Για $\alpha=6$ και $\beta=1$, να βρείτε τις θέσεις, το είδος και τις τιμές των τοπικών ακροτάτων της συνάρτησης f .

Μονάδες 6

Δ4. Για $\alpha=6$ και $\beta=1$, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_1^2 f(x) dx$

Μονάδες 5

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. (Θεωρία). Μία συνάρτηση f λέγεται παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, αν υπάρχει το όριο:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

και είναι πραγματικός αριθμός. Τότε συμβολίζουμε το όριο αυτό $f'(x_0)$ και το ονομάζουμε παράγωγο της f στο x_0 .

- A2.** α. Λ
β. Σ
γ. Σ
δ. Λ

A3. α. $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$ με $g(x) \neq 0$.

β. $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, με $x > 0$.

γ. $(e^x)' = e^x$, $x \in \mathbb{R}$.

δ. $(\sin x)' = \cos x$, $x \in \mathbb{R}$.

ΘΕΜΑ Β

B1.

Ημέρες απουσίας x_i	Υπάλληλοι v_i	Σχετική Συχνότητα f_i %	Αθροιστική Συχνότητα	Αθροιστική Σχετική Συχνότητα %	$x_i v_i$
0	8	16%	8	16	0
1	10	20%	18	36	10
2	15	30%	33	66	30
3	10	20%	43	86	30
4	5	10%	48	96	20
5	2	4%	50	100	10
Αθροίσματα	50	100%			100

$$v_3 = 50 - (8 + 10 + 10 + 5 + 2) = 15.$$

B2. $\bar{x} = \frac{v_1 x_1 + v_2 x_2 + v_3 x_3 + v_4 x_4 + v_5 x_5 + v_6 x_6}{v} = \frac{0 + 10 + 30 + 30 + 20 + 10}{50} = \frac{100}{50} = 2.$

B3. Επειδή $v = 50$ είναι $\delta = \frac{x_{25} + x_{26}}{2} = \frac{2+2}{2} = 2$.

B4. Το πλήθος των υπαλλήλων που απουσίασαν από 2 έως και 4 ημέρες είναι $v_3 + v_4 + v_5 = 15 + 10 + 5 = 30$.
Το αντίστοιχο ποσοστό είναι 60 %.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Είναι:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-1)(x-3)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x-3}{x+1} = -1.$$

Γ2. Είναι:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (\sqrt{x+3} + a) = a + 2.$$

Γ3. Η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$ αν και μόνο αν είναι

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1).$$

Από την τελευταία έχουμε: $-1 = a + 2 = a + 2$.

Οπότε $a + 2 = -1 \Leftrightarrow a = -3$.

Γ4. Για την τιμή $a = -3$ έχουμε:

$$\begin{aligned} A &= 3 \cdot f(0) + 2f(6) = 3 \frac{0^2 - 4 \cdot 0 + 3}{0^2 - 1} + 2 \cdot (\sqrt{6+3} - 3) = 3(-3) + 2(3 - 3) = \\ &= -9 + 0 = -9. \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ Δ

Η f ως πολυωνυμική είναι ορισμένη και παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} .

Δ1. Επειδή η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο σημείο $x_0 = 2$ είναι $f'(2) = 0$.

$$\text{Όμως } f'(x) = x^2 - 5x + \alpha.$$

Οπότε $4 - 10 + \alpha = 0 \Leftrightarrow -6 + \alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = 6$.

Επειδή η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $A(0, 1)$ θα είναι

$$f(0) = 1 \Leftrightarrow \beta = 1.$$

Δ2. Για τις τιμές $\alpha = 6$ και $\beta = 1$ ο τύπος της f γράφεται:

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 6x + 1 \quad \text{με} \quad f'(x) = x^2 - 5x + 6.$$

Από την εξίσωση $f'(x) = 0$ έχουμε: $x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)(x - 3) = 0$.

Βρίσκουμε $x = 2$ ή $x = 3$.

Κατασκευάζουμε τον πίνακα μεταβολών

x	$-\infty$	2	3	$+\infty$
f'	+	○	○	+
f	↗	↘	↗	

Επομένως η f είναι:

- γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty, 2]$.
- γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[2, 3]$.
- γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[3, +\infty)$.

Δ3. Σύμφωνα με τον παραπάνω πίνακα μεταβολών έχουμε:

- στη θέση $x = 2$ τοπικό μέγιστο το $f(2) = \frac{17}{3}$.
- στη θέση $x = 3$ τοπικό μέγιστο το $f(3) = \frac{11}{2}$.

Δ4. Είναι:

$$\begin{aligned} \int_1^2 f(x) dx &= \int_1^2 \left(\frac{1}{3}x^3 dx - \frac{5}{2}x^2 + 6x + 1 \right) dx = \frac{1}{3} \int_1^2 x^3 dx - \frac{5}{2} \int_1^2 x^2 dx + 6 \int_1^2 x dx + \int_1^2 dx = \\ &= \frac{1}{3} \left[\frac{x^4}{4} \right]_1^2 - \frac{5}{2} \left[\frac{x^3}{3} \right]_1^2 + 6 \left[\frac{x^2}{2} \right]_1^2 + [x]_1^2 = \frac{1}{3} \left[4 - \frac{1}{4} \right] - \frac{5}{2} \left[\frac{8}{3} - \frac{1}{3} \right] + 6 \left[\frac{4}{2} - \frac{1}{2} \right] + [2 - 1] = \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{15}{4} - \frac{5}{2} \cdot \frac{7}{3} + 6 \cdot \frac{3}{2} + 1 = \frac{15}{12} - \frac{35}{6} + \frac{18}{2} + 1 = \frac{65}{12}. \end{aligned}$$