Θέματα Μαθηματικών
Θετικής & Τεχν.Κατ/νσης
Γ΄ Λυκείου 2000

Ζήτημα 1ο

Α1. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ΄ ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, να γραφεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο Α (x_0, $f(x_0)$).

(Μονάδες 4)

Α2. Να αποδείξετε ότι, αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ΄ ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

(Μονάδες 8,5)

Β1. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α) Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, τότε η f΄ είναι πάντοτε συνεχής στο x_0.

β) Αν η f δεν είναι συνεχής στο x_0, τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0.

γ) Αν η f έχει δεύτερη παράγωγο στο x_0, τότε η f΄ είναι συνεχής στο x_0.

(Μονάδες 4,5)

Β2.
Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα της στήλης Α και δίπλα τον αριθμό της στήλης Β που αντιστοιχεί στην εφαπτομένη της κάθε συνάρτησης στο σημείο x_0.

Στήλη Α Συναρτήσεις	**Στήλη Β** Εφαπτόμενες
α. $f(x) = 3x^3$, $x_0 = 1$	**1.** $y = -2x + π$
β. $f(x) = ημ2x$, $x_0 = π/2$	**2.** $y = (1/4)x + 1$
γ. $f(x) = 3\|x\|$, $x_0 = 0$	**3.** $y = 9x - 6$
δ. $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 4$	**4.** $y = -9x + 5$
	5. δεν υπάρχει

(Μονάδες 8)

Απάντηση:

Α1. $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$

Α2. Αφού η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0,θα ισχύει:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

Τότε για $x \neq x_0$ θα έχουμε:

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0)$$

οπότε:

$$\lim_{x \to x_0} \left[f(x) - f(x_0)\right] = \lim_{x \to x_0} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0)\right] =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x \to x_0} (x - x_0) = f'(x_0) \cdot 0 = 0$$

Άρα:

$$\lim_{x \to x_0} \left[f(x) - f(x_0)\right] = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

δηλαδή η f είναι συνεχής στο x_0.

Β1.
α) Η πρόταση είναι **λανθασμένη**, αφού η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \text{συν}\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \quad \text{έχει} \quad f''(x = \begin{cases} 2x\text{σχσ}\frac{1}{x} + \text{ημ}\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

ενώ δεν είναι συνεχής στο 0.

β) Γνωρίζουμε ότι, αν η f είναι παραγωγίσιμη σε σημείο x_0, θα είναι συνεχής σε αυτό, άρα, αν η f δεν είναι συνεχής στο x_0, δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και η πρόταση είναι **λάθος**.

γ) Επειδή υπάρχει η δεύτερη παράγωγος της f στο x_0, υπάρχει και η παράγωγος της f΄ στο x_0, άρα η f΄ είναι συνεχής στο x_0 και η πρόταση είναι **σωστή**.
Επομένως έχουμε: **α – Λ, β – Λ, γ – Σ**.

Β.2.
α) $f'(x) = 9x^2$, άρα $f'(1) = 9$ και $f(1) = 3$.
Επομένως εξίσωση της εφαπτομένης είναι η:

$$y - 3 = 9(x - 1) \Leftrightarrow y = 9x - 6.$$

β) $f'(x) = 2\text{συν}2x$, άρα $f'(\pi/2) = 2\text{συν}\pi = -2$ και $f(\pi/2) = 0$.
Επομένως η εξίσωση της εφαπτομένης είναι η:

$$y - 0 = -2(x-(\pi/2)) \Leftrightarrow y = -2x + \pi.$$

γ) Η συνάρτηση $f(x) = 3|x|$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$, άρα δεν υπάρχει εφαπτομένη.

δ) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ άρα $f'(4) = 1/4$ και $f(4) = 2$

Επομένως εξίσωση εφαπτομένης είναι η:

$$y - 2 = \frac{1}{4}(x - 4) \Leftrightarrow y = \frac{1}{4}x + 1$$

Συνεπώς έχουμε:

α $\leftrightarrow$ **3**
β $\leftrightarrow$ **1**
γ $\leftrightarrow$ **5**
δ $\leftrightarrow$ **2**.

Ζήτημα 2ο

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(z) = \frac{2z + i}{\bar{z} - 2} \quad z \in C$$

με $z \neq -2i$, όπου $\bar{z}$ ο συζυγής του z.

α) Να βρείτε την τριγωνομετρική μορφή των μιγαδικών αριθμών:

$W_1 = f(9 - 5i)$

(Μονάδες 6)

$$W_2 = \left[\frac{\sqrt{2}}{3} f(9 - 5i)\right]^{2004}$$

(Μονάδες 6)

β) Θεωρούμε τον πίνακα:

$$M = \frac{\sqrt{2}}{3}\begin{bmatrix} |W_1| & 0 \\ 0 & -|W_1| \end{bmatrix}$$

όπου $|W_1|$ το μέτρο του μιγαδικού αριθμού W_1 του ερωτήματος α.

Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.
Ο γραμμικός μετασχηματισμός Τ με πίνακα Μ είναι:

Α. στροφή με κέντρο την αρχή των αξόνων Ο και γωνία θ = π/4
Β. συμμετρία ως προς τον άξονα xx΄
Γ. συμμετρία ως προς τον άξονα yy΄
Δ. συμμετρία ως προς την ευθεία y = x
Ε. ομοιοθεσία με κέντρο την αρχή των αξόνων Ο και λόγο:

$$\lambda = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

(Μονάδες 5)

γ) Αν Μ ο πίνακας του ερωτήματος β, τότε να βρεθεί ο πίνακας Χ, ώστε να ισχύει:

$$MX = K$$

όπου Κ είναι ο πίνακας που αντιστοιχεί στο γραμμικό μετασχηματισμό στροφής με κέντρο την αρχή των αξόνων Ο και γωνία θ = π/2.

(Μονάδες 8)

Απάντηση:

α) Είναι:

$$W_1 = f(9 - 5i) = \frac{2(9 - 5i) + i}{9 + 5i - 2i} = \frac{18 - 10i + i}{9 + 3i} = \frac{18 - 9i}{9 + 3i} =$$

$$= \frac{6 - 3i}{3 + i} = \frac{(6 - 3i)(3 - i)}{(3 + i)(3 - i)} = \frac{18 - 6i - 9i - 3}{9 + 1} = \frac{15 - 15i}{10} = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}i$$

$$\rho = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(-\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{9}{4}} = \sqrt{2 \cdot \frac{9}{4}} = \frac{3}{2}\sqrt{2}$$

$$\sigma\upsilon\nu\varphi = \frac{\alpha}{\rho} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{3}{2}\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\eta\mu\varphi = \frac{\beta}{\rho} = \frac{\frac{-3}{2}}{\frac{3}{2}\sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Επειδή είναι:

$$\sigma\upsilon\nu\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \kappa\alpha\iota \quad \eta\mu\varphi = -\frac{\sqrt{2}}{2},$$

προκύπτει ότι $\varphi = 7\pi/4$.

Άρα:

$$W_1 = \frac{3}{2}\sqrt{2}\left(\sigma\upsilon\nu\frac{7\pi}{4} + i\eta\mu\frac{7\pi}{4}\right)$$

Επίσης:

$$W_2 = \left[\frac{\sqrt{2}}{3} f(9 - 5i) \right]^{2004} = \left\{ \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{3}{2}\sqrt{2} \cdot \left[συν\left(-\frac{\pi}{4} \right) + iημ\left(-\frac{\pi}{4} \right) \right] \right\}^{2004} =$$

$$= συν\left(-\frac{2004\pi}{4} \right) + iημ\left(-\frac{2004\pi}{4} \right) =$$

= συν(-501π) + iημ(-501π) =

= συν(-2 $\bullet$ 250π - π) + iημ(-2 $\bullet$ 250π - π) =

= συν(-π) + iημ(-π) $\Leftrightarrow$ W_2 = συνπ + iημπ.

β) Έχουμε ότι:

$$|W_1| = \frac{3}{2}\sqrt{2} \quad και \quad |W_2| = 1,$$

άρα:

$$M = \frac{\sqrt{2}}{3}\begin{bmatrix} |W_1| & 0 \\ 0 & -|W_1| \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{3}\begin{bmatrix} \frac{3}{2}\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2}\sqrt{2} \end{bmatrix} \Leftrightarrow M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Από τη θεωρία γνωρίζουμε ότι ο πίνακας Μ είναι πίνακας του γραμμικού μετασχηματισμού: «συμμετρία ως προς τον άξονα xx΄ ”, άρα σωστό είναι το **Β**.

$$γ) \quad K = \begin{bmatrix} συν\frac{\pi}{2} & -ημ\frac{\pi}{2} \\ ημ\frac{\pi}{2} & συν\frac{\pi}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Όμως:

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

οπότε:

$$MX = K \Leftrightarrow X = M^{-1}K \Leftrightarrow X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow X = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ζήτημα 3ο

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο κλειστό διάστημα [0, 1] και ισχύει $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, 1)$.
Αν $f(0) = 2$ και $f(1) = 4$, να δείξετε ότι:

α. Η ευθεία $y = 3$ τέμνει τη γραφική παράσταση της f σ' ένα ακριβώς σημείο με τετμημένη $x_0 \in (0, 1)$.

(Μονάδες 7)

β. Υπάρχει $x_1 \in (0, 1)$, τέτοιο ώστε:

$$f(x_1) = \frac{f\left(\frac{1}{5}\right) + f\left(\frac{2}{5}\right) + f\left(\frac{3}{5}\right) + f\left(\frac{4}{5}\right)}{4}$$

(Μονάδες 12)

γ. Υπάρχει $x_2 \in (0, 1)$, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(x_2, f(x_2))$ να είναι παράλληλη στην ευθεία $y = 2x + 2000$.

(Μονάδες 6)

Απάντηση:

α) Επειδή η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο [0, 1], άρα θα είναι και συνεχής στο [0, 1]. Επίσης, επειδή είναι $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, 1)$, θα είναι η f γνησίως αύξουσα στο (0, 1), άρα το σύνολο τιμών της θα είναι το

$$[f(0), f(1)] = [2, 4]$$

Όμως, $3 \in [2, 4]$ και, αφού $f \nearrow$, τότε η f τέμνεται από την ευθεία $y = 3$ σε ένα ακριβώς σημείο με τετμημένη $x_0 \in (0, 1)$.

β) Η f είναι γνησίως αύξουσα στο [0,1], άρα:

$$f(0) < f(1/5) < f(1)$$

$$f(0) < f(2/5) < f(1)$$

$$f(0) < f(3/5) < f(1)$$

$$f(0) < f(4/5) < f(1)$$

Προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε:

$$4f(0) < f\left(\frac{1}{5}\right) + f\left(\frac{2}{5}\right) + f\left(\frac{3}{5}\right) + f\left(\frac{4}{5}\right) < 4f(1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(0) < \frac{f\left(\frac{1}{5}\right) + f\left(\frac{2}{5}\right) + f\left(\frac{3}{5}\right) + f\left(\frac{4}{5}\right)}{4} < f(1)$$

Όμως,η f είναι συνεχής στο [0, 1], οπότε υπάρχει $x_1 \in (0, 1)$, τέτοιο ώστε:

$$f(x_1) < \frac{f\left(\frac{1}{5}\right) + f\left(\frac{2}{5}\right) + f\left(\frac{3}{5}\right) + f\left(\frac{4}{5}\right)}{4}$$

γ) Επειδή η συνάρτηση f είναι συνεχής στο [0, 1] και παραγωγίσιμη στο (0, 1), προκύπτει από το θεώρημα μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_2 \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε:

$$f'(x_2) = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} \Leftrightarrow f'(x_2) = 2$$

Επομένως η εφαπτομένη της C_f στο Μ είναι παράλληλη στην ευθεία ε: $y = 2x + 2000$, αφού $\lambda_\varepsilon = f'(x_2) = 2$.

Ζήτημα 4ο

Τη χρονική στιγμή $t = 0$ χορηγείται σ' έναν ασθενή ένα φάρμακο. Η συγκέντρωση του φαρμάκου στο αίμα του ασθενούς δίνεται από τη συνάρτηση:

$$f(t) = \frac{\alpha t}{1 + \left(\frac{t}{\beta}\right)^2}, \ t \geq 0$$

όπου α και β είναι σταθεροί θετικοί πραγματικοί αριθμοί και ο χρόνος t μετράται σε ώρες. Η μέγιστη τιμή της συγκέντρωσης είναι ίση με 15 μονάδες και επιτυγχάνεται 6 ώρες μετά τη χορήγηση του φαρμάκου.
α. Να βρείτε τις τιμές των σταθερών α και β.

(Μονάδες 15)

β. Με δεδομένο ότι η δράση του φαρμάκου είναι αποτελεσματική όταν η τιμή της συγκέντρωσης είναι τουλάχιστον ίση με 12 μονάδες, να βρείτε το χρονικό διάστημα που το φάρμακο δρα αποτελεσματικά.

(Μονάδες 10)

Απάντηση:

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$ ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με:

$$f'(t) = \frac{\alpha \cdot \left[1 + \left(\frac{t}{\beta}\right)^2\right] - \alpha t \cdot 2\frac{t}{\beta} \cdot \frac{1}{\beta}}{\left[1 + \left(\frac{t}{\beta}\right)^2\right]^2} = \frac{\alpha\left[1 - \left(\frac{t}{\beta}\right)^2\right]}{\left[1 + \left(\frac{t}{\beta}\right)^2\right]^2}, \ t \geq 0$$

α) Αφού σε t = 6 ώρες επιτυγχάνεται η μέγιστη τιμή f(t) = 15 μονάδες, θα έχουμε:

$$\begin{cases} f(6) = 15 \\ f'(6) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{6\alpha}{1+\dfrac{36}{\beta^2}} = 15 \\ \alpha\left[1 - \dfrac{6^2}{\beta^2}\right] = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6\alpha = 15 + \dfrac{540}{\beta^2} \\ -\dfrac{36}{\beta^2} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6\alpha = 15 + \dfrac{540}{36} \\ \beta = \pm 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6\alpha = 30 \\ \beta = \pm 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 5 \\ \beta = \pm 6 \end{cases}$$

Αφού β > 0, η τιμή β = -6 απορρίπτεται, άρα β = 6.

Επομένως:

$$f(t) = \frac{5t}{1+\dfrac{t^2}{36}} = \frac{180t}{36+t^2}, \quad t \geq 0$$

β) Αφού το φάρμακο έχει αποτελεσματική δράση όταν η τιμή της συγκέντρωσης είναι τουλάχιστον ίση με 12 μονάδες, ψάχνουμε τις τιμές του t, έτσι ώστε: f(t) ≥ 12, με t ≥ 0. Τότε:

$$\frac{180t}{36+t^2} \geq 12 \Leftrightarrow 180t \geq 432 + 12t^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 12t^2 - 180t + 432 \leq 0 \Leftrightarrow t^2 = -15t + 36 \leq 0 \Leftrightarrow 3 \leq t \leq 12$$

Άρα το φάρμακο δρα αποτελεσματικά από 3 ώρες έως 12 ώρες.