

# ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ 2004

## ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

### ΘΕΜΑ 1ο

**A.** Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της σταθερής συνάρτησης  $f(x)=c$  είναι ίση με 0.  
**Μονάδες 8**

**B.** Να δώσετε τον ορισμό της συνέχειας μιας συνάρτησης  $f$  στο σημείο  $x_0$  του πεδίου ορισμού της.  
**Μονάδες 5**

**Γ.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

**α.** Η συχνότητα της τιμής  $x_i$  μιας μεταβλητής  $X$  είναι αρνητικός αριθμός.

**β.** Στην κανονική κατανομή το 95% των παρατηρήσεων βρίσκεται στο διάστημα  $(\bar{x}-s, \bar{x}+s)$ , όπου  $\bar{x}$  είναι η μέση τιμή των παρατηρήσεων και  $s$  η τυπική τους απόκλιση.

**γ.** Αν διαιρέσουμε τη συχνότητα  $v_i$  μιας μεταβλητής  $X$  με το μέγεθος  $n$  του δείγματος, προκύπτει η σχετική συχνότητα  $f_i$  της τιμής  $x_i$ .  
**Μονάδες 6**

**Δ.** Στον παρακάτω πίνακα τα  $A$  και  $B$  συμβολίζουν ενδεχόμενα ενός πειράματος τύχης. Στη **Στήλη I** αναγράφονται διάφορες σχέσεις για τα  $A$  και  $B$  διατυπωμένες στην κοινή γλώσσα και στη **Στήλη II** σχέσεις διατυπωμένες στη γλώσσα των συνόλων.

Να γράψετε στο τετράδιό σας τα γράμματα της **Στήλης I** και δίπλα σε κάθε γράμμα τον αριθμό της **Στήλης II** που αντιστοιχεί στην ίδια διατύπωση.

	Στήλη I		Στήλη II
<b>α</b>	πραγματοποιείται ένα τουλάχιστον από τα $A, B$	<b>1</b>	$A \cap B$
<b>β</b>	πραγματοποιείται το $A$ αλλά όχι το $B$	<b>2</b>	$A - B$
<b>γ</b>	πραγματοποιούνται συγχρόνως τα $A$ και $B$	<b>3</b>	$(A \cup B)'$
		<b>4</b>	$A \cup B$

Στη **Στήλη II** περισσεύει μία σχέση.

**Μονάδες 6**

### ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση  $f$  με τύπο  $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{\sqrt{x} - \sqrt{3}}$ .

**A.** Να βρείτε το πεδίο ορισμού της  $f$ .

**Μονάδες 10**

**B.** Να υπολογίσετε το  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$

**Μονάδες 15**

### ΘΕΜΑ 3ο

Στην "Αττική οδό" εξυπηρετούνται καθημερινά 200 χιλιάδες οχήματα, τα οποία διανύουν από 5 έως 45 χιλιόμετρα. Η διανυόμενη απόσταση σε χιλιόμετρα από τα οχήματα αυτά παρουσιάζεται στην πρώτη στήλη του πίνακα:

Κλάσεις σε χλμ.	Κέντρο κλάσης $x_i$	Συχνότητα $n_i$ σε χλμ.	Σχετική συχνότητα $f_i \%$	Αθροιστική Συχνότητα $N_i$ σε χλμ.	Αθρ. Σχετ. Συχνότητα $F_i \%$
[5, 15)		60			
[15, 25)					68
[25, 35)				180	
[35, 45)					
Σύνολο		200			

**A.** Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον παρακάτω πίνακα και να συμπληρώσετε τις τιμές των αντίστοιχων μεγεθών.

**Μονάδες 10**

**B.** Να σχεδιάσετε το ιστόγραμμα  $(x_i, f_i \%)$  και το πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων.

**Μονάδες 5**

**Γ.** Να βρείτε τη μέση τιμή  $\bar{x}$ .

**Μονάδες 5**

**Δ.** Να βρείτε το πλήθος των οχημάτων που διανύουν απόσταση τουλάχιστον 25 χιλιομέτρων.

**Μονάδες 5**

### ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται η συνάρτηση  $f$  με τύπο  $f(x) = 2x^3 - \frac{5}{2}x^2 + x + 10$ .

Οι πιθανότητες  $P(A)$  και  $P(B)$  δύο ενδεχομένων  $A$  και  $B$  ενός δειγματικού χώρου  $\Omega$  είναι ίσες με τις τιμές του  $x$ , στις οποίες η  $f$  έχει αντίστοιχα τοπικό ελάχιστο και τοπικό μέγιστο.

**A.** Να δείξετε ότι  $P(A) = \frac{1}{2}$  και  $P(B) = \frac{1}{3}$ .

**Μονάδες 9**

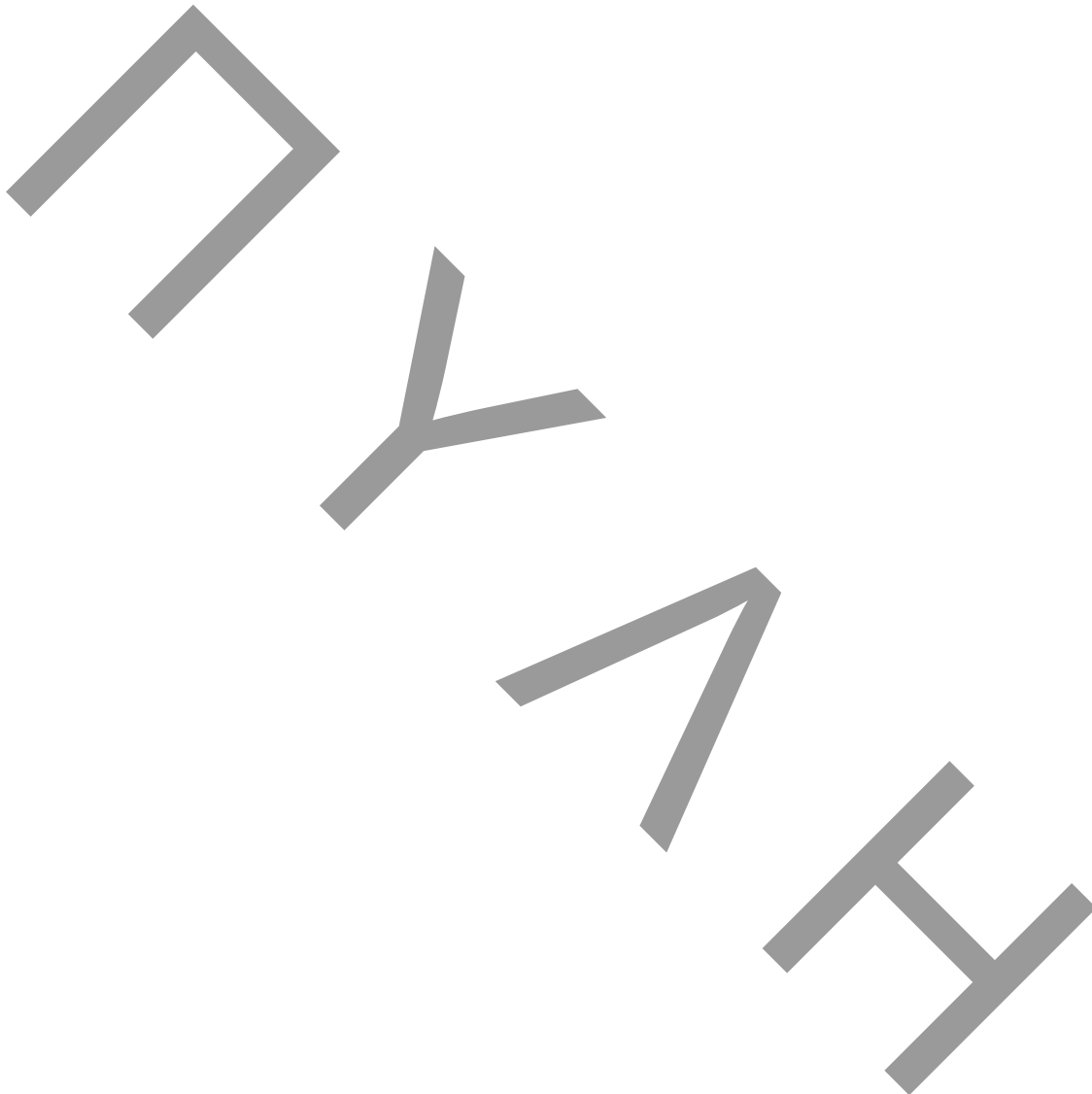
**B.** Για τις παραπάνω τιμές των  $P(A)$ ,  $P(B)$  καθώς και για  $P(A \cup B) = \frac{2}{3}$ , να βρείτε τις πιθανότητες:

i.  $P(A \cap B)$

ii.  $P(A - B)$

- iii.  $P[(A \cap B)']$   
iv.  $P[(A - B) \cup (B - A)]$ .

**Μονάδες 16**



## ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

### ΘΕΜΑ 1ο

**A.** Είναι:  $A_f = \mathbb{R}$

και  $f(x+h) - f(x) = c - c = 0$ .

Οπότε για  $h \neq 0$  είναι  $\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 0$ .

Άρα  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 0$

Συνεπώς  $(c)' = 0$

**B.** Μια συνάρτηση  $f$  λέγεται συνεχής στο σημείο  $x_0$  του πεδίου ορισμού της αν και μόνον αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

**Γ.** α. Λάθος β. Λάθος γ. Σωστό

**Δ.** α. 4 β. 2 γ. 1

### ΘΕΜΑ 2ο

**A.** Πρέπει (i)  $x \geq 0$  και  
(ii)  $\sqrt{x} \neq \sqrt{3}$

δηλ  $x \neq 3$

Άρα  $A_f = [0, 3) \cup (3, +\infty)$ .

**B.** Για  $x \in [0, 3) \cup (3, +\infty)$  έχουμε:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^2 - 4x + 3}{\sqrt{x} - \sqrt{3}} = \frac{(x-1)(x-3)(\sqrt{x} + \sqrt{3})}{(\sqrt{x} - \sqrt{3})(\sqrt{x} + \sqrt{3})} = \\ &= \frac{(x-1)(x-3)(\sqrt{x} + \sqrt{3})}{x-3} = (x-1)(\sqrt{x} + \sqrt{3}) \end{aligned}$$

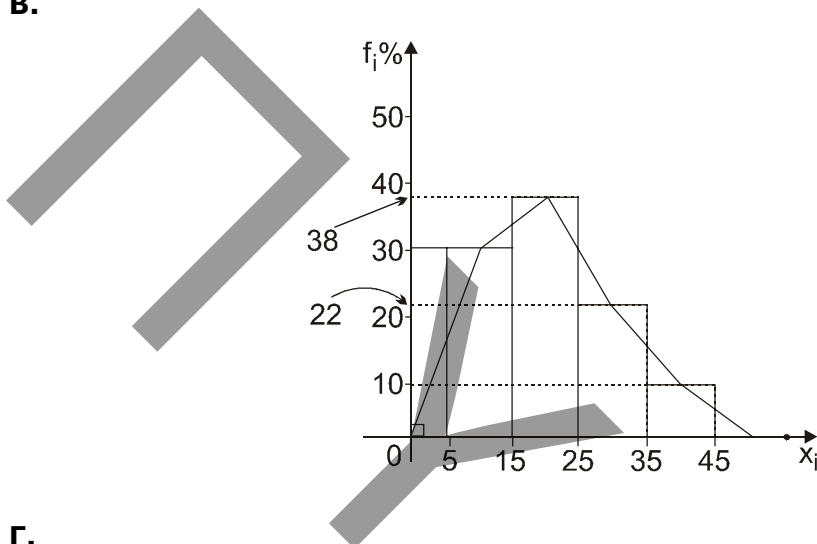
$$\begin{aligned} \text{Οπότε } \lim_{x \rightarrow 3} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3} [(x-1) \cdot (\sqrt{x} + \sqrt{3})] = \\ &= (3-1) \cdot (\sqrt{3} + \sqrt{3}) = 4\sqrt{3} \end{aligned}$$

### ΘΕΜΑ 3ο

A.

	$x_i$	$v_i$	$f_i\%$	$N_i$	$F_i\%$
[5, 15)	10	60	30	60	30
[15, 25)	20	76	38	136	68
[25, 35)	30	44	22	180	90
[35, 45)	40	20	10	200	100
		200	100		

B.



Γ.

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{1}{v} \sum_{i=1}^4 v_i x_i = \frac{10 \cdot 60 + 76 \cdot 20 + 30 \cdot 44 + 40 \cdot 20}{200} = \\ &= \frac{600 + 1520 + 1320 + 800}{200} = \frac{4240}{200} = 21,2 \text{ Km} \end{aligned}$$

Δ. Είναι  $v_3 + v_4 = 44 + 20 = 64$  χιλιάδες οχήματα.

### ΘΕΜΑ 4ο

A. Η συνάρτηση  $f$  είναι ορισμένη και παραγωγίσιμη σ' όλο το  $\mathbb{R}$  ως πολυωνυμική με  $f'(x) = 6x^2 - 5x + 1$

Έτσι έχουμε

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x^2 - 5x + 1 = 0 \Leftrightarrow \left( x = \frac{1}{3} \text{ ή } x = \frac{1}{2} \right)$$

$x$	$-\infty$	$1/3$	$1/2$	$+\infty$	
$f'(x)$	+	○	-	○	+
$f(x)$	↗ ↘ ↗				

T. μεγ. T. ελαχ.

Επομένως

$$P(A) = \frac{1}{2} \text{ και } P(B) = \frac{1}{3}$$

**B.** Για τις τιμές των  $P(A) = \frac{1}{2}$ ,  $P(B) = \frac{1}{3}$  και  $P(A \cup B) = \frac{2}{3}$  βρίσκουμε:

**i.**  $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{2}{3} = \frac{1}{6}$

**ii.**  $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

**iii.**  $P[(A \cap B)^c] = 1 - P(A \cap B) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

**iv.** Τα ενδεχόμενα  $A - B$ ,  $B - A$  είναι ασυμβίβαστα σύμφωνα με την εφαρμογή 2 σελ. 153 σχολ. βιβλίου.

$$P[(A - B) \cup (B - A)] = P(A - B) + P(B - A) = P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) =$$

$$= P(A) + P(B) - 2P(A \cap B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{2}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{2}.$$