

# ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ 2005

## ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

### ΘΕΜΑ 1

**A.** Να αποδειχθεί ότι για δύο ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου  $\Omega$  ισχύει:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Τα απλά ενδεχόμενα του δειγματικού χώρου  $\Omega$  να θεωρηθούν ισοπίθανα.

**Μονάδες 10**

**B.**

**α.** Ποιες μεταβλητές λέγονται ποσοτικές;

**Μονάδες 3**

**β.** Πότε μια ποσοτική μεταβλητή ονομάζεται διακριτή και πότε συνεχή;

**Μονάδες 4**

**Γ.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

**α.** Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα  $\Delta$  και ισχύει  $f'(x) > 0$  για κάθε εσωτερικό σημείο του  $\Delta$ , τότε η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\Delta$ .

**Μονάδες 2**

**β.** Ισχύει:

$$\left( \frac{f(x)}{g(x)} \right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$$

όπου  $f, g$  παραγωγίσιμες συναρτήσεις.

**Μονάδες 2**

**γ.** Η διακύμανση είναι μέτρο θέσης.

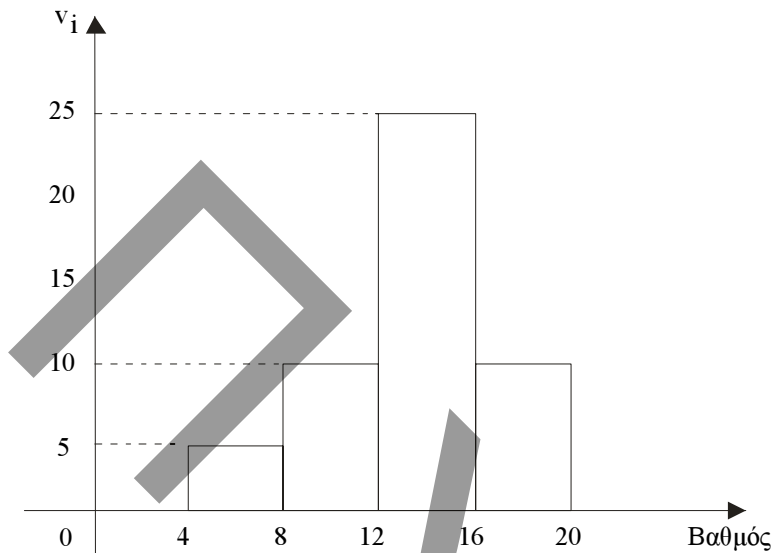
**Μονάδες 2**

**δ.** Αν  $A \subseteq B$  τότε  $P(A) > P(B)$ .

**Μονάδες 2**

## ΘΕΜΑ 2

Σε ένα διαγώνισμα Βιολογίας η βαθμολογία των μαθητών δίνεται από το παρακάτω ιστόγραμμα συχνοτήτων  $v_i$  :



α. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας και να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

Κλάσεις βαθμίας ( )	Κέντρο κλάσης $x_i$	Συχνότητα $v_i$	Σχετική συχνότητα $f_i$	Αθροιστική συχνότητα $N_i$	Αθρ. σχετ. συχνότητα $F_i$
[4, 8)					
[8, 12)					
[12, 16)					
[16, 20)					
Σύνολο					

Μονάδες 11

β. Να βρείτε τη μέση τιμή των βαθμών.

Μονάδες 8

γ. Πόσοι μαθητές έχουν βαθμό το πολύ μέχρι και 10;

Μονάδες 6

### ΘΕΜΑ 3

Έστω  $A, B$  ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου  $\Omega$ , ώστε να ισχύουν:

(i) Η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί ένα τουλάχιστον από τα ενδεχόμενα  $A, B$  είναι  $7/8$

(ii) Οι πιθανότητες  $P(B)$ ,  $P(A \cap B)$  δεν είναι ίσες και ανήκουν στο σύνολο

$$X = \left\{ k, \frac{1}{2}, \frac{5}{4} \right\}, \text{ όπου:}$$

$$k = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{3x - 15}{x^2 - 6x + 5}$$

α. Να βρεθεί το  $k$

**Μονάδες 5**

β. Να βρεθούν τα  $P(B)$ ,  $P(A \cap B)$  και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

**Μονάδες 8**

γ. Να βρεθούν οι πιθανότητες:

(1) Να πραγματοποιηθεί το ενδεχόμενο  $A$

**Μονάδες 6**

(2) Να πραγματοποιηθεί μόνο το ενδεχόμενο  $A$

**Μονάδες 6**

### ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση  $f$  με τύπο  $f(x) = \frac{1}{x}$ ,  $x \in (0, +\infty)$

α. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της  $f$  στο σημείο  $\Lambda(1,1)$ .

**Μονάδες 7**

β. Από τυχαίο σημείο  $M(x, y)$  της γραφικής παράστασης της  $f$  φέρνουμε παράλληλες ευθείες προς τους άξονες  $xx'$  και  $yy'$ , οι οποίες σχηματίζουν με τους ημιάξονες  $Ox$ ,  $Oy$  ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. Να βρεθούν οι συντεταγμένες του σημείου  $M$ , ώστε η περίμετρος του ορθογωνίου παραλληλογράμμου να είναι ελάχιστη.

**Μονάδες 10**

γ. Οι τετμημένες πέντε διαφορετικών σημείων της εφαπτομένης του ερωτήματος (α) έχουν μέση τιμή  $\bar{x} = 5$  και τυπική απόκλιση  $s_x = 2$ . Να βρεθεί η μέση τιμή  $\bar{y}$  και η τυπική απόκλιση  $s_y$  των τεταγμένων των σημείων αυτών.

**Μονάδες 8**

## ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

### ΘΕΜΑ 1

**A.**

3ος κανόνας λογισμού των πιθανοτήτων:

Για δύο ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου  $\Omega$  ισχύει:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

#### ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Για δύο ενδεχόμενα A και B έχουμε

$$N(A \cup B) + N(A) + N(B) - N(A \cap B), \quad (1)$$

αφού στο άθροισμα  $N(A) + N(B)$  το πλήθος των στοιχείων  $A \cap B$  υπολογίζεται δυο φορές.

Αν διαιρέσουμε τα μέλη της (1) με  $N(\Omega)$  έχουμε:

$$\frac{N(A \cup B)}{N(\Omega)} = \frac{N(A)}{N(\Omega)} + \frac{N(B)}{N(\Omega)} - \frac{N(A \cap B)}{N(\Omega)}$$

και επομένως

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Η ιδιότητα αυτή είναι γνωστή ως **προσθετικός νόμος** (additive law).

**B.**

**α. Ποσοτικές** λέγονται οι μεταβλητές των οποίων οι τιμές είναι αριθμοί.

**β. Διακριτή** ονομάζεται η ποσοτική μεταβλητή η οποία παίρνει μόνο μεμονωμένες τιμές.

**Συνεχής** ονομάζεται η ποσοτική μεταβλητή η οποία μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή από ένα διάστημα πραγματικών αριθμών  $(\alpha, \beta)$ .

**Γ.**

$\alpha \rightarrow \Sigma$

$\beta \rightarrow \Delta$

$\gamma \rightarrow \Delta$

$\delta \rightarrow \Delta$

### ΘΕΜΑ 2

**α.**

Κλάσεις βαθ/γίας [ )	Κέντρο κλάσης $x_i$	Συχνότητα $v_i$	Σχετική συχνότητα $f_i$	Αθροιστική συχνότητα $N_i$	Αθρ.σχετ. συχνότητα $F_i$
[4, 8)	6	5	0,1	5	0,1
[8, 12)	10	10	0,2	15	0,3
[12, 16)	14	25	0,5	40	0,8
[16, 20)	18	10	0,2	50	1
Σύνολο		50	1		

$$\beta. \bar{x} = \frac{5 \cdot 6 + 10 \cdot 10 + 25 \cdot 14 + 10 \cdot 18}{50} = \frac{660}{50} = 13,2.$$

γ. Βαθμό το πολύ μέχρι και 10 έχουν  $5 + 5 = 10$  μαθητές.

### ΘΕΜΑ 3

α. Είναι  $\kappa = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{3x - 15}{x^2 - 6x + 5} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{3(x - 5)}{(x - 1)(x - 5)} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{3}{x - 1} = \frac{3}{5 - 1} = \frac{3}{4}$ .

β. Αφού  $\kappa = \frac{3}{4}$ , το σύνολο  $X = \left\{ \frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{5}{4} \right\}$ .

Επειδή  $\frac{5}{4} > 1$ , η τιμή  $\frac{5}{4}$  αποκλείεται να ισούται με κάποια από τις τιμές

$P(A \cap B), P(B)$ . Έτσι  $\{P(A \cap B), P(B)\} = \left\{ \frac{3}{4}, \frac{1}{2} \right\}$ .

Ισχύει  $A \cap B \subseteq B$  άρα  $P(A \cap B) \leq P(B)$  και επειδή  $P(A \cap B) \neq P(B)$  είναι  $P(A \cap B) < P(B)$ .

Άρα  $P(A \cap B) = \frac{1}{2}$ ,  $P(B) = \frac{3}{4}$ .

γ.

(1)  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ .

Άρα  $\frac{7}{8} = P(A) + \frac{3}{4} - \frac{1}{2}$ , οπότε  $P(A) = \frac{5}{8}$ .

(2) Η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί μόνο το ενδεχόμενο A είναι:

$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{5}{8} - \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$ .

### ΘΕΜΑ 4

α.

1ος τρόπος λύσης:

Η συνάρτηση  $f(x) = \frac{1}{x}$  είναι παραγωγίσιμη στο  $(0, +\infty)$ , με  $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ .

Η εφαπτομένη της καμπύλης της  $f$  στο σημείο  $\Lambda(1, 1)$  έχει συντελεστή διεύθυνσης  $\lambda = f'(1) = -1$ .

Επομένως η εξίσωσή της είναι

$$y = -x + \beta.$$

Επειδή όμως το σημείο  $\Lambda(1, 1)$  ανήκει στην εφαπτομένη, είναι

$$1 = -1 + \beta \Leftrightarrow \beta = 2.$$

Άρα η ζητούμενη εξίσωση της εφαπτομένης είναι  $y = -x + 2$ .

2ος τρόπος λύσης:

Η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της  $f$  στο σημείο  $\Lambda(1, 1)$  είναι :

$$y - f(1) = f'(1)(x - 1).$$

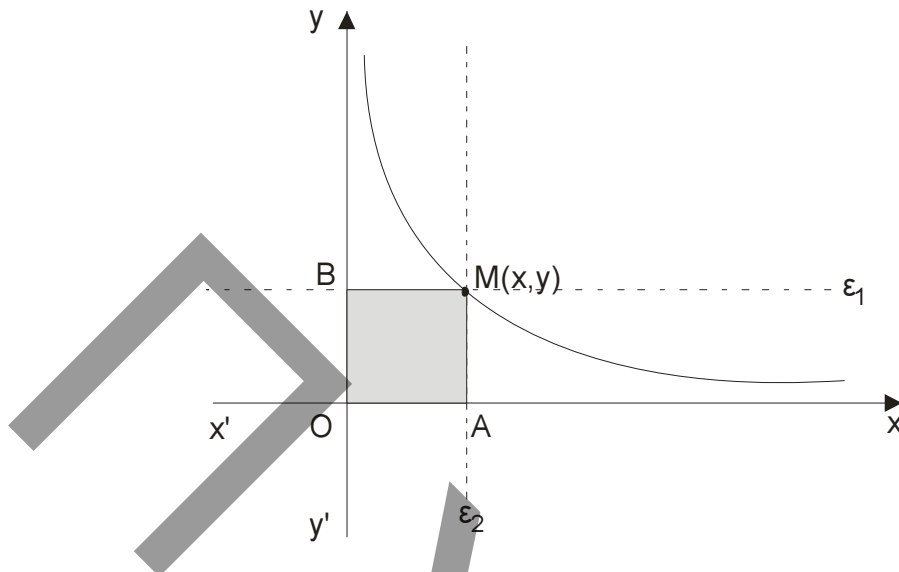
Όμως

$$f(1) = 1 \text{ και } f'(1) = -\frac{1}{1^2} = -1.$$

Επομένως

$$y - 1 = -1(x - 1) \Leftrightarrow y = -x + 1 + 1 \Leftrightarrow y = -x + 2.$$

β.



Έστω  $M(x, y)$  τυχαίο σημείο της γραφικής παράστασης της  $f(x) = \frac{1}{x}$  και  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  οι ευθείες που διέρχονται από το  $M$  και είναι παράλληλες αντίστοιχα προς τους άξονες  $x'x$  και  $y'y$ .

Η περίμετρος του σχηματιζόμενου ορθογωνίου παραλληλογράμου  $OAMB$  είναι

$$\Pi = 2x + 2y = 2(x + y) \quad (1)$$

Λόγω της σχέσης  $y = \frac{1}{x}$ , η (1) γράφεται :

$$\Pi = 2\left(x + \frac{1}{x}\right).$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$\Pi(x) = 2\left(x + \frac{1}{x}\right) \quad \text{με } x \in (0, +\infty).$$

Η  $\Pi(x)$  είναι παραγωγίσιμη στο  $(0, +\infty)$  με



$$\Pi'(x) = 2\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) = 2 \frac{x^2 - 1}{x^2} = 2 \frac{(x-1)(x+1)}{x^2}.$$

Από την εξίσωση  $\Pi'(x) = 0$  έχουμε:

$$2 \frac{(x-1)(x+1)}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = +1 \quad \text{ή} \quad x = -1.$$

Η τιμή  $x = -1$  απορρίπτεται γιατί  $x \in (0, +\infty)$ .

Σχηματίζουμε τον πίνακα μεταβολών:

x	0	1	$+\infty$
$\Pi'(x)$	-	0	+
$\Pi(x)$		ελαχ.	

$$\Pi(1) = 4$$

Οπότε για την τιμή  $x = 1$ , η  $\Pi(x)$  παρουσιάζει ελάχιστο. Άρα το ζητούμενο σημείο είναι το  $M(1, 1)$ .

γ. Είναι :

$$\bar{y} = -\bar{x} + 2 = -3 \quad \text{και}$$

$$S_y = |-1|S_x = 2.$$