

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
2006

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

A.1 Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ .
Να αποδείξετε ότι:

- Αν $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ .
- Αν $f'(x) < 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το Δ .

Μονάδες 10

A.2 Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ . Πότε λέμε ότι η f στρέφει τα κοίλα προς τα άνω ή είναι κυρτή στο Δ ;

Μονάδες 5

B. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Για κάθε μιγαδικό αριθμό z ισχύει $|z|^2 = z^2$.

Μονάδες 2

β. Αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$, τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 .

Μονάδες 2

γ. Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f είναι διάστημα.

Μονάδες 2

δ. Ισχύει ο τύπος $(3^x)' = x \cdot 3^{x-1}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 2

ε. Ισχύει η σχέση

$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} f'(x)g(x)dx$, όπου f', g' είναι συνεχείς συναρτήσεις στο $[\alpha, \beta]$.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2ο

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = 2 + (x-2)^2$ με $x \geq 2$.

α. Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1.

Μονάδες 6

β. Να αποδείξετε ότι υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} της f και να βρείτε τον τύπο της.

Μονάδες 8

γ. i. Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και f^{-1} με την ευθεία $y = x$.

Μονάδες 4

ii. Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και f^{-1} .

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί με z_1, z_2, z_3 με $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ και $z_1 + z_2 + z_3 = 0$.

α. Να αποδείξετε ότι:

i. $|z_1 - z_2| = |z_3 - z_1| = |z_2 - z_3|$.

Μονάδες 9

ii. $|z_1 - z_2|^2 \leq 4$ και $\Re(z_1 \bar{z}_2) \geq -1$.

Μονάδες 8

β. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των z_1, z_2, z_3 στο μιγαδικό επίπεδο, καθώς και το είδος του τριγώνου που αυτές σχηματίζουν.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x+1}{x-1} - \ln x$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της συνάρτησης f .

Μονάδες 8

β. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς 2 ρίζες στο πεδίο ορισμού της.

Μονάδες 5

γ. Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g(x) = \ln x$ στο σημείο $A(\alpha, \ln \alpha)$ με $\alpha > 0$ και η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $h(x) = e^x$ στο σημείο $B(\beta, e^\beta)$ με $\beta \in \mathfrak{R}$ ταυτίζονται, τότε να δείξετε ότι ο αριθμός α είναι ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$.

Μονάδες 9

δ. Να αιτιολογήσετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων g και h έχουν ακριβώς δύο κοινές εφαπτόμενες.

Μονάδες 3

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

A.1 Θεωρία. Σχολ. βιβλίο σελ. 253

A.2 Ορισμός. Σχολ. βιβλίο σελ. 273

B. $\alpha \rightarrow \Lambda$

$\beta \rightarrow \Sigma$

$\gamma \rightarrow \Sigma$

$\delta \rightarrow \Lambda$

$\varepsilon \rightarrow \Sigma$

ΘΕΜΑ 2ο

α. $f(x) = 2 + (x - 2)^2, \quad x \geq 2$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $[2, +\infty)$ με $f'(x) = 2(x - 2) > 0$ για κάθε $x \in (2, +\infty)$.

Άρα f γνησίως αύξουσα στο $[2, +\infty)$ και επομένως είναι και 1-1.

β. Αφού η f είναι 1-1 υπάρχει η f^{-1} αντίστροφη συνάρτηση της f με $f^{-1} : f(A) \rightarrow \mathbb{R}$.

Αφού η f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $A = [2, +\infty)$ έπεται ότι

$$f(A) = [f(2), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)] = [2, +\infty)$$

$$\text{Τώρα αν } y = f(x) \Leftrightarrow y = 2 + (x - 2)^2 \Leftrightarrow y - 2 = (x - 2)^2.$$

$$\text{Επειδή } x - 2 \geq 0, y - 2 \geq 0, \text{ έχουμε } x - 2 = \sqrt{y - 2}, \quad x \in [2, +\infty), \quad y \in [2, +\infty)$$

$$\text{ή } x = 2 + \sqrt{y - 2}, \quad x \in [2, +\infty), \quad y \in [2, +\infty)$$

$$\text{ή } f^{-1}(y) = 2 + \sqrt{y - 2}, \quad y \in [2, +\infty).$$

$$\text{Τελικά } f^{-1}(x) = 2 + \sqrt{x - 2}, \quad x \in [2, +\infty).$$

γ. i) Έχουμε

$$\begin{aligned} & \begin{cases} y = f(x) \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \begin{cases} y = 2 + (x - 2)^2 \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 + (x - 2)^2 = x \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x - 2)^2 = x - 2 \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow \left\{ \begin{matrix} x = 2 \\ y = 2 \end{matrix} \right\} \quad \text{ή} \quad \left\{ \begin{matrix} x = 3 \\ y = 3 \end{matrix} \right\} \\ & \begin{cases} y = f^{-1}(x) \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 + \sqrt{x - 2} \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \begin{cases} y = 2 + \sqrt{x - 2} \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 + \sqrt{x - 2} = x \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x - 2} = x - 2 \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = (x - 2)^2 \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \left\{ \begin{matrix} x = 2 \\ y = 2 \end{matrix} \right\} \quad \text{ή} \quad \left\{ \begin{matrix} x = 3 \\ y = 3 \end{matrix} \right\}. \end{aligned}$$

Τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων f και f^{-1} με την $y = x$ είναι τα $A(2,2)$, $B(3,3)$.

ii)

Οι συναρτήσεις f και f^{-1} είναι συνεχείς άρα και η διαφορά τους είναι συνεχής.

$$f(x) - f^{-1}(x) = [2 + (x - 2)^2] - [2 + \sqrt{x - 2}] = (x - 2)^2 - \sqrt{x - 2} = \sqrt{x - 2} \cdot (\sqrt{x - 2}^3 - 1) \text{ Προ}$$

οκύπτει $f(x) - f^{-1}(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x - 2} = 0$ ή $(\sqrt{x - 2})^3 = 1 \Leftrightarrow x = 2$ ή $x = 3$.
Δηλαδή τα κοινά τους σημεία είναι τα $A(2,2)$, $B(3,3)$.

$$\begin{aligned} \text{Επειδή } 2 \leq x \leq 3 & \Leftrightarrow 0 \leq x - 2 \leq 1 \Leftrightarrow \\ \sqrt{x - 2} \leq 1 & \Leftrightarrow \sqrt{x - 2}^3 \leq 1 \Leftrightarrow (\sqrt{x - 2})^3 - 1 \leq 0. \end{aligned}$$

Επίσης είναι $\sqrt{x - 2} \geq 0$ για $x \in [2,3]$.

Άρα $f(x) - f^{-1}(x) \leq 0$ για $x \in [2,3]$.

Οπότε το εμβαδόν του ζητούμενου χωρίου είναι

$$E = \int_2^3 (f^{-1}(x) - f(x)) dx = \int_2^3 (\sqrt{x - 2} - (x - 2)^2) dx = \frac{1}{3} \text{ τ.μ.}$$

ΘΕΜΑ 3ο

α.ι Από τη σχέση $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ έχουμε ισοδύναμα $z_1 = -z_2 - z_3$ (1).

Θα δείξουμε ότι $|z_1 - z_2| = |z_3 - z_1|$ (2).

Πράγματι η (2) λόγω της (1) γράφεται ισοδύναμα:

$$\begin{aligned} |-z_2 - z_3 - z_2| &= |z_3 + z_2 + z_3| \Leftrightarrow \\ |2z_2 + z_3| &= |2z_3 + z_2| \Leftrightarrow \\ |2z_2 + z_3|^2 &= |2z_3 + z_2|^2 \Leftrightarrow \\ (2z_2 + z_3)(\overline{2z_2 + z_3}) &= (2z_3 + z_2)(\overline{2z_3 + z_2}) \Leftrightarrow \\ (2z_2 + z_3)(2\bar{z}_2 + \bar{z}_3) &= (2z_3 + z_2)(2\bar{z}_3 + \bar{z}_2) \Leftrightarrow \\ 4z_2\bar{z}_2 + 2z_2\bar{z}_3 + 2z_3\bar{z}_2 + z_3\bar{z}_3 &= 4z_3\bar{z}_3 + 2z_3\bar{z}_2 + 2z_2\bar{z}_3 + z_2\bar{z}_2 \Leftrightarrow \\ 3z_2\bar{z}_2 &= 3z_3\bar{z}_3 \Leftrightarrow \\ z_2\bar{z}_2 &= z_3\bar{z}_3 \Leftrightarrow \\ |z_2|^2 &= |z_3|^2 \Leftrightarrow \\ |z_2| &= |z_3|. \end{aligned}$$

Η τελευταία σχέση είναι αληθής λόγω της υπόθεσης, άρα και η (2).

Με ανάλογο τρόπο δείχνουμε ότι $|z_3 - z_1| = |z_2 - z_3|$ (3).

Από τις (2) και (3) προκύπτει ότι $|z_1 - z_2| = |z_2 - z_3|$.

Άρα $|z_1 - z_2| = |z_3 - z_1| = |z_2 - z_3|$.

α.ii Είναι:

$$|z_1 - z_2| = |z_1 + (-z_2)| \leq |z_1| + |-z_2| = |z_1| + |z_2| = 1 + 1 = 2$$

Άρα $|z_1 - z_2| \leq 2$.

Οπότε $|z_1 - z_2|^2 \leq 4$.

Τότε:

$$\begin{aligned} |z_1 - z_2|^2 \leq 4 &\Leftrightarrow \\ (z_1 - z_2)(\overline{z_1 - z_2}) \leq 4 &\Leftrightarrow \\ (z_1 - z_2)(\bar{z}_1 - \bar{z}_2) \leq 4 &\Leftrightarrow \\ z_1\bar{z}_1 - z_1\bar{z}_2 - z_2\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2 \leq 4 &\Leftrightarrow \\ |z_1|^2 + |z_2|^2 - (z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1z_2) \leq 4 &\Leftrightarrow \\ 1 + 1 - (z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1z_2) \leq 4 &\Leftrightarrow \\ z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1z_2 \geq -2 &\Leftrightarrow \\ z_1\bar{z}_2 + \overline{z_1\bar{z}_2} \geq -2 &\Leftrightarrow \\ 2\operatorname{Re}(z_1\bar{z}_2) \geq -2 &\Leftrightarrow \\ \operatorname{Re}(z_1\bar{z}_2) \geq -1. \end{aligned}$$

β. Επειδή $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ προκύπτει ότι οι εικόνες των μιγαδικών $A(z_1)$, $B(z_2)$, $\Gamma(z_3)$ βρίσκονται σε κύκλο με κέντρο $O(0, 0)$ και ακτίνα

$\rho = 1$. Άρα ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι ο παραπάνω κύκλος.
 Λόγω τώρα της σχέσης $|z_1 - z_2| = |z_3 - z_1| = |z_2 - z_3|$ προκύπτει ότι οι κορυφές $A(z_1), B(z_2), \Gamma(z_3)$ αποτελούν κορυφές ισόπλευρου τριγώνου εγγεγραμμένου στον παραπάνω γεωμετρικό τόπο.

ΘΕΜΑ 4ο

α. Πρέπει $x > 0$ και $x \neq 1$. Άρα $A_f = (0,1) \cup (1,+\infty)$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο A_f ως διαφορά παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με

$$f'(x) = -\left[\frac{2}{(x-1)^2} + \frac{1}{x}\right] < 0 \text{ για κάθε } x \in A_f.$$

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(0, 1)$ και $(1, +\infty)$.

Επειδή τώρα $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$ και η f συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $(0, 1)$ είναι $f((0,1)) = \mathfrak{R}$.

Επίσης επειδή $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ και η f συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $(1, +\infty)$, είναι $f((1,+\infty)) = \mathfrak{R}$.

Έτσι συνολικά το σύνολο τιμών της f είναι $f((0,1) \cup (1,+\infty)) = \mathfrak{R}$.

β. Επειδή $f((0,1)) = \mathfrak{R}$ έπεται $0 \in f((0,1))$ δηλαδή υπάρχει $x_1 \in (0,1)$ ώστε $f(x_1) = 0$. Η ρίζα αυτή είναι μοναδική στο $(0,1)$, αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα και άρα 1-1.

Ομοίως επειδή $f((1,+\infty)) = \mathfrak{R}$ έπεται $0 \in f((1,+\infty))$ δηλαδή υπάρχει $x_2 \in (1,+\infty)$ ώστε $f(x_2) = 0$.

Η ρίζα αυτή είναι επίσης μοναδική στο $(1,+\infty)$, αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα και άρα 1-1.

Έτσι η f έχει ακριβώς 2 ρίζες.

γ. Η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της $g(x) = \ln x$ στο σημείο $A(\alpha, \ln \alpha)$, $\alpha > 0$ είναι:

$$y = \frac{1}{\alpha}x - 1 + \ln \alpha \quad (\varepsilon_1)$$

Η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της $f(x) = e^x$ στο σημείο $B(\beta, e^\beta)$, $\beta \in \mathfrak{R}$ είναι:

$$y = e^\beta x + e^\beta - \beta e^\beta \quad (\varepsilon_2).$$

Οι (ε_1) , (ε_2) ταυτίζονται αν και μόνο αν

$$\frac{1}{\alpha} = e^\beta \Leftrightarrow \beta = -\ln \alpha \quad (1) \text{ και } \ln \alpha - 1 = e^\beta - \beta \cdot e^\beta \quad (2)$$

Τότε η (2) γράφεται:

$$\ln \alpha - 1 = \frac{1}{\alpha} + \ln \alpha \frac{1}{\alpha} \Leftrightarrow$$

$$\alpha \ln \alpha - \alpha = 1 + \ln \alpha \Leftrightarrow$$

$$-\alpha - 1 = (\ln \alpha)(1 - \alpha) \Leftrightarrow$$

$$\frac{\alpha + 1}{\alpha - 1} = \ln \alpha \Leftrightarrow$$

$$\frac{\alpha + 1}{\alpha - 1} - \ln \alpha = 0 \Leftrightarrow f(\alpha) = 0$$

δ.

Από το 4γ προκύπτει ότι οι γραφικές παραστάσεις των $g(x)$, $h(x)$ έχουν κοινή εφαπτόμενη στα σημεία τους $A(\alpha, \ln \alpha)$ και $B(\beta, e^\beta)$ αντίστοιχα αν και μόνον αν:

$$\begin{pmatrix} \beta = -\ln \alpha \\ f(\alpha) = 0 \end{pmatrix}$$

Επειδή η $f(x) = 0$ έχει δύο διακεκριμένες ρίζες $\alpha_1 \in (0, 1)$ και $\alpha_2 \in (1, +\infty)$ προκύπτουν δύο εφαπτόμενες οι

$$(\varepsilon_1): y = \frac{1}{\alpha_1} x - 1 + \ln \alpha_1$$

$$(\varepsilon_2): y = \frac{1}{\alpha_2} x - 1 + \ln \alpha_2.$$

Οι εφαπτόμενες αυτές είναι ακριβώς δύο (διακεκριμένες) αφού έχουν δύο διακεκριμένους συντελεστές διεύθυνσης $\frac{1}{\alpha_1}, \frac{1}{\alpha_2}$ αντίστοιχα.

$$\left(\frac{1}{\alpha_1} \in (1, +\infty), \frac{1}{\alpha_2} \in (0, 1) \right).$$