<u>ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ</u>

ΘΕΤΙΚΗΣ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

2008

<u>ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ</u>

ΘΕΜΑ 1ο

Α.1 Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $f(x) = \ln|x|$, $x \in \mathbb{R}^*$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ και ισχύει:

$$\left(\ln|x|\right)' = \frac{1}{x}$$

Μονάδες 10

Α.2 Πότε μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα [α,β];

Μονάδες 5

Β. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α. Αν μια συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ είναι 1−1, τότε για την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} ισχύει:

$$f^{-1}(f(x)) = x, \quad x \in A \quad \text{και} \quad f(f^{-1}(y)) = y, \quad y \in f(A)$$

Μονάδες 2

β. Μια συνεχής συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.

Μονάδες 2

γ. Όταν η διακρίνουσα Δ της εξίσωσης $\alpha z^2 + \beta z + \gamma = 0$ με $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ και $\alpha \neq 0$ είναι αρνητική, τότε η εξίσωση δεν έχει ρίζες στο σύνολο $\mathbb{C}$ των μιγαδικών.

Μονάδες 2

δ. Αν μια συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και στρέφει τα κοίλα προς τα άνω, τότε κατ' ανάγκη θα ισχύει

$$f''(x) > 0$$

για κάθε πραγματικό αριθμό x.

Μονάδες 2

ε. Αν η f είναι συνεχής σε διάστημα Δ και $\alpha, \beta, \gamma \in \Delta$ τότε ισχύει

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_\alpha^\gamma f(x)dx + \int_\gamma^\beta f(x)dx$$

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2ο

Αν για τους μιγαδικούς αριθμούς z και w ισχύουν:

$$\left|\left(i+2\sqrt{2}\right)z\right|=6 \quad \text{και} \quad \left|w-(1-i)\right|=\left|w-(3-3i)\right|$$

τότε να βρείτε:

α. το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z.

Μονάδες 6

β. το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών w.

Μονάδες 7

γ. την ελάχιστη τιμή του $|w|$

Μονάδες 6

δ. την ελάχιστη τιμή του $|z-w|$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x\ln x, & x>0 \\ 0\ , & x=0 \end{cases}$

α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 0.

Μονάδες 3

β. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση f και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Μονάδες 9

γ. Να βρείτε το πλήθος των διαφορετικών θετικών ριζών της εξίσωσης $x=e^{\frac{\alpha}{x}}$ για όλες τις πραγματικές τιμές του α.

Μονάδες 6

δ. Να αποδείξετε ότι ισχύει

$$f'(x+1)>f(x+1)-f(x)\ ,$$

για κάθε $x>0$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω f μια συνάρτηση συνεχής στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$f(x) = (10x^3 + 3x)\int_0^2 f(t)\,\mathrm{d}t - 45$$

α. Να αποδείξετε ότι

$$f(x)=20x^3+6x-45$$

Μονάδες 8

β. Δίνεται επίσης μια συνάρτηση g δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι

$$g''(x) = \lim_{h\to 0}\frac{g'(x)-g'(x-h)}{h}$$

Μονάδες 4

γ. Αν για τη συνάρτηση f του ερωτήματος (α) και τη συνάρτηση g του ερωτήματος (β) ισχύει ότι

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-2g(x)+g(x-h)}{h^2} = f(x)+45$$

και $g(0)=g'(0)=1$, τότε:

i. να αποδείξετε ότι $g(x)=x^5+x^3+x+1$

Μονάδες 10

ii. να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι 1–1

Μονάδες 3

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α.1 Θεωρία (Σελ. 235 σχολ. βιβλίου).

Α.2 Θεωρία (Σελ. 191 σχολ. βιβλίου).

Β

- **α.** Σωστό
- **β.** Σωστό
- **γ.** Λάθος
- **δ.** Λάθος
- **ε.** Σωστό

ΘΕΜΑ 2ο

α. Η ισότητα $\left|(i+2\sqrt{2})z\right| = 6$, γράφεται ισοδύναμα:

$$\left|i+2\sqrt{2}\right| \cdot |z| = 6 \Leftrightarrow \sqrt{8+1} \cdot |z| = 6 \Leftrightarrow 3|z| = 6 \Leftrightarrow |z| = 2 .$$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z είναι ο κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων Ο, ακτίνα $\rho = 2$ και εξίσωση (c): $x^2 + y^2 = 2^2$.

β. Η δοσμένη σχέση για τους μιγαδικούς αριθμούς w περιγράφει τη μεσοκάθετο του τμήματος **ΓΔ**, όπου **Γ**(1, −1) και **Δ**(3, −3). Πιο αναλυτικά αν $w = x + yi$ οι μιγαδικοί αριθμοί που ικανοποιούν τη δοσμένη σχέση, έχουμε:

$$|w-(1-i)| = |w-(3-3i)| \Leftrightarrow |x+yi-1+i| = |x+yi-3+3i| \Leftrightarrow$$

$$|(x-1)+(y+1)i|^2 = |(x-3)+(y+3)i|^2 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+1)^2 = (x-3)^2 + (y+3)^2 \Leftrightarrow$$

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 + 2y + 1 = x^2 - 6x + 9 + y^2 + 6y + 9 \Leftrightarrow$$

$$4x - 4y - 16 = 0 \Leftrightarrow x - y - 4 = 0 .$$

Επομένως ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων Μ(w) είναι τα σημεία της ευθείας (ε) με εξίσωση: $x - y - 4 = 0$.

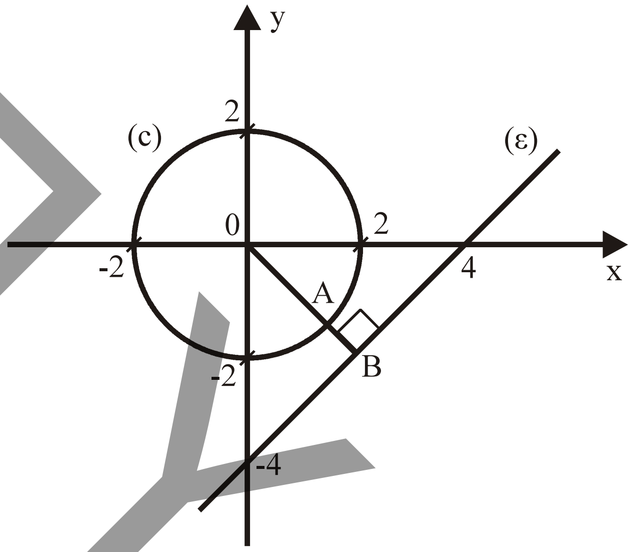
γ. Η ελάχιστη τιμή του $|w|$ είναι η απόσταση του σημείου Ο από την ευθεία

(ε): $x - y - 4 = 0$, δηλαδή:

$$d(O,\varepsilon) = \frac{|-4|}{\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2} .$$

δ. Σύμφωνα με το παρακάτω σχήμα, όπου αναπαριστώνται γεωμετρικά οι γεωμετρικοί τόποι των εικόνων (c), (ε) αντίστοιχα των μιγαδικών αριθμών z και w βρίσκουμε ότι, η ελάχιστη τιμή του $|z-w|$ είναι το μήκος του τμήματος ΑΒ:

$$AB = OB - OA = 2\sqrt{2} - \rho = 2(\sqrt{2}-1)\,.$$



ΘΕΜΑ 3ο

α) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}(x\cdot \ln x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}} \overset{\frac{-\infty}{+\infty}}{\underset{\text{De l' Hospital}}{=}}$

$= \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to 0^+}(-x) = 0\,.$

Επίσης $f(0)=0$. Συνεπώς f συνεχής στο 0.

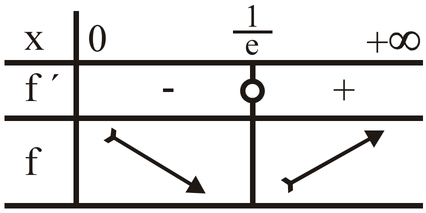
β) Η f είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$ ως γινόμενο συνεχών και συνεχής στο 0 λόγω του α.

Άρα η f είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$.

Για $x>0$: $f'(x) = (x\ln x)' = (x)'\ln x + x\cdot(\ln x)' = \ln x + x\dfrac{1}{x} = \ln x + 1\,.$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x + 1 = 0 \Leftrightarrow \ln x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{e}.$$

Έχουμε τον παρακάτω πίνακα μεταβολών:



- Στο $\left[0, \frac{1}{e}\right)$ η f είναι γνησίως φθίνουσα άρα:

$$f\left(\left[0, \frac{1}{e}\right)\right) = \left(\lim_{x \to \frac{1}{e}} f(x),\ f(0)\right] = \left(-\frac{1}{e}, 0\right].$$

- Στο $\left[\frac{1}{e}, +\infty\right)$ η f είναι γνησίως αύξουσα άρα:

$$f\left(\left[\frac{1}{e}, +\infty\right)\right) = \left[f\left(\frac{1}{e}\right),\ \lim_{x \to +\infty} f(x)\right) = \left[-\frac{1}{e}, +\infty\right).$$

Επομένως: $f([0,\ +\infty)) = \left(-\frac{1}{e},\ 0\right] \cup \left[-\frac{1}{e},\ +\infty\right) = \left[-\frac{1}{e},\ +\infty\right).$

γ.

Επειδή $e^{\frac{a}{x}} > 0$, για κάθε $x \neq 0$, για την εξίσωση $x = e^{\frac{a}{x}}$ προκύπτει ο περιορισμός $x \in (0, +\infty)$. Με τον περιορισμό αυτό η εξίσωση $x = e^{\frac{a}{x}}$ γράφεται ισοδύναμα:

$$\ln x = \ln e^{\frac{a}{x}} \Leftrightarrow \ln x = \frac{a}{x} \Leftrightarrow x \ln x = a \Leftrightarrow f(x) = a, \quad x > 0 \quad (1).$$

Επειδή το σύνολο των τιμών της f βρέθηκε $\left[-\frac{1}{e}, +\infty\right)$ προκύπτουν οι περιπτώσεις:

i) Αν $a \in (-\infty, -\frac{1}{e})$ η (1) είναι αδύνατη.

ii) Αν $a=-\frac{1}{e}$, η τιμή $-\frac{1}{e}$ είναι η ελάχιστη τιμή της f την οποία παίρνει μόνον για $x=\frac{1}{e}$.

Έτσι η (1) έχει την ρίζα $x=\frac{1}{e}$.

iii) Αν $a\in(-\frac{1}{e},0)$, επειδή $\left(-\frac{1}{e},0\right)=f\left(\left(0,\frac{1}{e}\right)\right)$ και η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(0,\frac{1}{e}\right)$ προκύπτει ότι, η (1) έχει ακριβώς μία ρίζα στο $\left(0,\frac{1}{e}\right)$ που είναι θετική.

Επίσης επειδή $\left[-\frac{1}{e},+\infty\right)=f\left(\left[\frac{1}{e},+\infty\right)\right)$ και η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{1}{e},+\infty\right)$ προκύπτει ότι η (1) έχει ακριβώς άλλη μία ρίζα στο $\left[\frac{1}{e},+\infty\right)$ που είναι επίσης θετική.

iv) Αν $a=0$ η (1) γίνεται $x\ln x=0\Leftrightarrow x=0$ (απορρίπτεται) ή $\ln x=0\Leftrightarrow x=1$. (Μία ρίζα θετική).

v) Αν $a\in(0,+\infty)$ επειδή $(0,+\infty)\subseteq\left[-\frac{1}{e},+\infty\right)=f\left(\left[\frac{1}{e},+\infty\right)\right)$ και η f γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{1}{e},+\infty\right)$, προκύπτει ότι η (1) έχει ακριβώς μία ρίζα στο $\left[\frac{1}{e},+\infty\right)$, που είναι θετική.

δ. Είναι $f''(x)=\frac{1}{x}>0$ για κάθε $x>0$.

Άρα f' γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

Η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στο $[x, x+1]$, για κάθε $x>0$.

Άρα υπάρχει $\xi\in(x,\ x+1)$: $\frac{f(x+1)-f(x)}{x+1-x}=f'(\xi)\Leftrightarrow f(x+1)-f(x)=f'(\xi)\quad(2)$.

Όμως $\xi<x+1\overset{f'\ \text{γν. αύξουσα}}{\Longrightarrow}f'(\xi)<f'(x+1)\overset{(2)}{\Longrightarrow}f(x+1)-f(x)<f'(x+1)$.

ΘΕΜΑ 4ο

α) Το $\int_0^2 f(t)dt$ είναι πραγματικός αριθμός.

Έτσι μπορούμε να θέσουμε $\int_0^2 f(t)dt = k \in R$. **(1)**

Τότε $f(x) = (10x^3 + 3x)k - 45$ και άρα :

$$\int_0^2 f(t)dt = \int_0^2 \left[\left(10t^3 + 3t\right)k - 45\right]dt = \left[k\left(10\frac{t^4}{4} + 3\frac{t^2}{2}\right) - 45t\right]_0^2 = 40k + 6k - 90 = 46k - 90.$$

(2)

Από τις **(1)**, **(2)** προκύπτει ότι: $k = 46\,k - 90 \Leftrightarrow k = 2$

Οπότε τελικά: $f(x) = (10x^3 + 3x)2 - 45 = 20x^3 + 6x - 45$.

β) Έστω $x \in \mathbb{R}$. Έχουμε:

$$\lim_{h\to 0}\frac{g'(x) - g'(x-h)}{h} = \lim_{h\to 0}\left[-\frac{g'(x-h) - g'(x)}{h}\right] =$$

$$\underset{\substack{h \to 0 \\ u \to 0}}{\overset{-h=u}{=\!=\!=}} \lim_{u\to 0}\left[-\frac{g'(x+u) - g'(x)}{-u}\right] = \lim_{u\to 0}\frac{g'(x+u) - g'(x)}{u} = g''(x),$$

αφού ή g από υπόθεση είναι δύο φορές παραγωγίσιμη.

γ) (i) Έχουμε:

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h) - 2g(x) + g(x-h)}{h^2} \underset{\text{D.L.H.}}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{h\to 0}\frac{\left[g(x+h) - 2g(x) + g(x-h)\right]'}{(h^2)'} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{g'(x+h) - g'(x-h)}{2h} = \frac{1}{2}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{g'(x+h) - g'(x-h)}{h} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\lim_{h\to 0}\left[\frac{g'(x+h) - g'(x) - g'(x-h) + g'(x)}{h}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\lim_{h\to 0}\left[\frac{g'(x+h) - g'(x)}{h} + \frac{g'(x) - g'(x-h)}{h}\right] = \frac{1}{2}\cdot\left[g''(x) + g''(x)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 2\cdot g''(x) = g''(x).$$

Οπότε $g''(x) = f(x) + 45 = (20x^3 + 6x - 45) + 45 = 20x^3 + 6x$.

Η $g''(x) = 20x^3 + 6x$ γράφεται:

$$\left(g'(x)\right)' = (20\frac{x^4}{4} + 6\frac{x^2}{2})' \Rightarrow g'(x) = 5x^4 + 3x^2 + c_1.$$

Για $x = 0$ έχουμε: $g'(0) = c_1 = 1$. Οπότε $g'(x) = 5x^4 + 3x^2 + 1$.

Η $g'(x) = 5x^4 + 3x^2 + 1$ τώρα γράφεται:

$$g'(x) = \left(5\frac{x^5}{5} + 3\frac{x^3}{3} + x\right)' \Rightarrow g(x) = x^5 + x^3 + x + c_2$$

Για $x = 0$ έχουμε: $g(0) = c_2 = 1$

Άρα $g(x) = x^5 + x^3 + x + 1$.

(ii) Η $g(x) = x^5 + x^3 + x + 1$ ως πολυωνυμική, είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $g'(x) = 5x^4 + 3x^2 + 1$.

Όμως $g'(x) = 5x^4 + 3x^2 + 1 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, άρα και '1–1'.