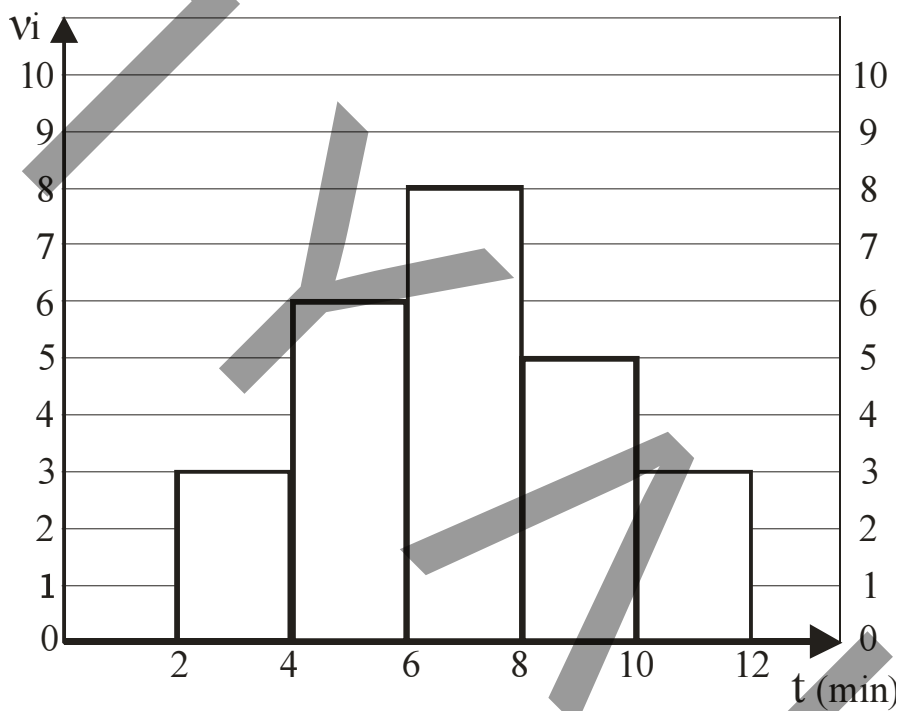


ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
Β΄ ΚΥΚΛΟΥ ΤΕΕ
2007

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Οι χρόνοι καθυστερήσεων που παρατηρήθηκαν σε 25 δρομολόγια ενός οργανισμού σιδηροδρόμων δίνονται από το παρακάτω ιστόγραμμα συχνοτήτων:



α. Να μεταφέρετε τον παρακάτω πίνακα στο τετράδιό σας και να τον συμπληρώσετε με τη βοήθεια του παραπάνω ιστογράμματος συχνοτήτων.

Διάστημα	Συχνότητα v_i	Μέσο διαστήματος K_i	$v_i K_i$	Σχετική συχνότητα α $f_i\%$	Σχετική αθροιστική συχνότητα %
[2, 4)					
[4, 6)					
[6, 8)					
[8, 10)					
[10,12)					
Αθροίσματα					

Μονάδες 10

β. Να βρείτε το μέσο χρόνο καθυστερήσεων των δρομολογίων.

Μονάδες 5

γ. Πόσα δρομολόγια είχαν καθυστέρηση τουλάχιστον 6 λεπτά;

Μονάδες 5

δ. Ποιο είναι το ποσοστό των δρομολογίων που είχαν καθυστέρηση λιγότερο από 8 λεπτά;

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση f με:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 4x^2 + 3x}{x^2 - x} & \text{αν } x < 0 \\ -3 + \beta & \text{αν } x = 0 \\ e^x - \alpha & \text{αν } x > 0 \end{cases} \quad \text{όπου } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

α. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$.

Μονάδες 8

β. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$.

Μονάδες 4

γ. Να βρείτε την τιμή του α , ώστε να υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

Μονάδες 8

δ. Για την τιμή $\alpha=4$ να υπολογίσετε τον πραγματικό αριθμό β , ώστε η f να είναι συνεχής στο $x=0$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x^2 + kx + \lambda$, $k, \lambda \in \mathbb{R}$.

Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_0=1$ και το σημείο $A(1,0)$ ανήκει στη γραφική της παράσταση,

α. να δείξετε ότι $k=-2$ και $\lambda=1$.

Μονάδες 12

β. να υπολογίσετε τη δεύτερη παράγωγο f'' της f .

Μονάδες 5

γ. να δείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:
 $f(x) + f'(x) + f''(x) > 0$.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = 10 \ln x - 5x^2$, $x > 0$.

α. Να βρείτε την παράγωγο f' της f .

Μονάδες 5

β. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

Μονάδες 8

γ. Για ποια τιμή του x η f παρουσιάζει ακρότατο. Να προσδιορίσετε το είδος του ακροτάτου και να το υπολογίσετε.

Μονάδες 8

δ. Να δείξετε ότι $f(x) \leq -5$, για κάθε $x > 0$.

Μονάδες 4

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

α.

Διάστημα	Συχνότητα v_i	Μέσο διαστήματος K_i	$v_i K_i$	Σχετική συχνότητ α $f_i\%$	Σχετική αθροιστική συχνότητα %
[2, 4)	3	3	9	12%	12%
[4, 6)	6	5	30	24%	36%
[6, 8)	8	7	56	32%	68%
[8, 10)	5	9	45	20%	88%
[10,12)	3	11	33	12%	100%
Αθροίσματα	25		173	100%	

β. Μέσος Χρόνος Καθυστερήσεων = $\frac{9+30+56+45+33}{25} = \frac{173}{25} = 6,92$ λεπτά.

γ. Τα δρομολόγια που είχαν καθυστέρηση τουλάχιστον 6 λεπτά είναι στο πλήθος:
 $8+5+3 = 16$.

δ. Το ποσοστό των δρομολογίων που είχαν καθυστέρηση λιγότερο από 8 λεπτά είναι:
68%.

ΘΕΜΑ 2ο

α. Για $x < 0$ είναι:

$$f(x) = \frac{x^3 - 4x^2 + 3x}{x^2 - x} = \frac{x(x^2 - 4x + 3)}{x(x-1)} = \frac{x(x-1)(x-3)}{x(x-1)} = x - 3.$$

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x - 3) = 0 - 3 = -3$$

β. Για $x > 0$ είναι: $f(x) = e^x - \alpha$.

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (e^x - \alpha) = e^0 - \alpha = 1 - \alpha.$$

γ. Το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ υπάρχει όταν και μόνον:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \Leftrightarrow -3 = 1 - \alpha \Leftrightarrow \alpha = 4.$$

Τότε $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -3$.

δ. Για $\alpha = 4$ υπολογίστηκε ότι $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -3$.

Η f θα είναι συνεχής στο $x = 0$ όταν και μόνον:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) \Leftrightarrow -3 = -3 + \beta \Leftrightarrow \beta = 0.$$

ΘΕΜΑ 3ο

α. Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} με $f'(x) = 2x + \kappa$.

- Αφού παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_0 = 1$ είναι $f'(1) = 0 \Leftrightarrow 2 \cdot 1 + \kappa = 0 \Leftrightarrow \kappa = -2$.
- Αφού το $A(1, 0) \in C_f$ είναι $f(1) = 0 \Leftrightarrow 1^2 + \kappa \cdot 1 + \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = -\kappa - 1 = -(-2) - 1 = 1$.
Έτσι $f(x) = x^2 - 2x + 1$, $f'(x) = 2x - 2$.

β. $f''(x) = (2x - 2)' = 2$, $x \in \mathbb{R}$.

γ. $f(x) + f'(x) + f''(x) = x^2 - 2x + 1 + 2x - 2 + 2 = x^2 + 1 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ΘΕΜΑ 4ο

α. Η f είναι ορισμένη και παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με

$$f'(x) = (10 \ln x - 5x^2)' = \frac{10}{x} - 10x.$$

β. Από την εξίσωση $f'(x) = 0$ βρίσκουμε:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{10}{x} - 10x = 0 \Leftrightarrow \frac{10 - 10x^2}{x} = 0 \Leftrightarrow \frac{10(1-x)(1+x)}{x} = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } x = -1.$$

Η τιμή $x = -1$ απορρίπτεται, αφού $x > 0$.

Κατασκευάζουμε πίνακα μεταβολών:

x	0	1	$+\infty$
f'		$+$	$-$
f		\nearrow	\searrow

Σύμφωνα με τον παραπάνω πίνακα έχουμε ότι:

- Η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0, 1]$.
 - Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[1, +\infty)$.
- γ. Η f παρουσιάζει μέγιστο στη θέση $x = 1$ και είναι $f(1) = -5$.
- δ. Αφού η f παρουσιάζει στη θέση $x = 1$ μέγιστο το $f(1) = -5$, προκύπτει ότι:
 $f(x) \leq f(1) = -5$ για κάθε $x > 0$.