

Θέματα Άλγεβρας Γενικής Παιδείας Β' Λυκείου 2000

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

Ζήτημα 1ο

A.1. Να γράψετε τον τύπο που δίνει το νιοστό όρο a_n μιας αριθμητικής προόδου (a_n) που έχει πρώτο όρο a_1 και διαφορά ω .
(Μονάδες 3)

A.2. Να γράψετε τη σχέση μεταξύ των πραγματικών αριθμών α , β , γ , έτσι ώστε οι αριθμοί αυτοί, με τη σειρά που σας δίνονται, να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.
(Μονάδες 3)

A.3. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα S_n των πρώτων n όρων μιας γεωμετρικής προόδου (a_n) , που έχει πρώτο όρο a_1 και λόγο $\lambda \neq 1$, είναι:

$$S_n = a_1 \cdot \frac{\lambda^n - 1}{\lambda - 1}$$

(Μονάδες 6,5)

B.1. Στη στήλη A δίνεται ο πρώτος όρος a_1 και η διαφορά ω τριών αριθμητικών προόδων και στη στήλη B ο νιοστός όρος a_n τεσσάρων αριθμητικών προόδων. Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα της στήλης A και δίπλα σε κάθε γράμμα τον αριθμό της στήλης B που αντιστοιχεί στο σωστό νιοστό όρο.

| Στήλη A | Στήλη B |
|----------------------------|-------------------|
| α. $a_1 = 1, \omega = -2$ | 1. $a_n = -n$ |
| β. $a_1 = 0, \omega = 3$ | 2. $a_n = 4n - 3$ |
| γ. $a_1 = -1, \omega = -1$ | 3. $a_n = 3 - 2n$ |
| | 4. $a_n = 3n - 3$ |

(Μονάδες 6)

B.2. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Οι αριθμοί $-5, 5, 15$, με τη σειρά που σας δίνονται, είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

β. Ο εικοστός όρος της αριθμητικής προόδου $10, 7, 4 \dots$ είναι ίσος με 20.

γ. Σε κάθε αριθμητική πρόοδο (a_n) για τους όρους της a_2, a_4, a_6 ισχύει η σχέση $2a_4 = a_2 + a_6$.

(Μονάδες 4,5)

Β.3. Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Αν σε μια γεωμετρική πρόοδο ο πρώτος όρος είναι ίσος με 1 και ο λόγος ίσος με 2, τότε το άθροισμα των πρώτων n όρων της είναι ίσο με:

A. $\frac{2^n - 1}{2}$.

B. $2^n - 1$.

Γ. 2^{n-1} .

Δ. $1 - 2^n$.

Ε. κανένα από τα προηγούμενα.

(Μονάδες 2)

Ζήτημα 2ο

Δίνεται το πολυώνυμο:

$$P(x) = ax^3 + (\beta - 1)x^2 - 3x - 2\beta + 6$$

Όπου a, β πραγματικοί αριθμοί.

α) Αν ο αριθμός 1 είναι ρίζα του πολυωνύμου $P(x)$ και το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x + 1$ είναι ίσο με 2, τότε να δείξετε ότι $a = 2$ και $\beta = 4$.

(Μονάδες 15)

β) Για τις τιμές των a και β του ερωτήματος (α), να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$

(Μονάδες 10)

Ζήτημα 3ο

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = 2\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x - 2\eta\mu^2 x - 4\sigma\upsilon\nu^2 x$$

όπου x πραγματικός αριθμός.

α) Να μετατρέψετε τη συνάρτηση f στη μορφή $f(x) = \rho\eta\mu(2x + \varphi) + \kappa$, όπου ρ, φ, κ πραγματικοί αριθμοί και $\rho > 0$.

(Μονάδες 9)

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του x η συνάρτηση f παίρνει τη μέγιστη τιμή και ποια είναι αυτή.

(Μονάδες 6)

γ) Να λύσετε την εξίσωση

$$f(x) - f\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$$

στο διάστημα $[0, \pi]$.

(Μονάδες 10)

Ζήτημα 4ο

Ένας αριθμός βακτηριδίων τριπλασιάζεται σε αριθμό κάθε μία ώρα.

A. Αν αρχικά υπάρχουν 10 βακτηρίδια, να βρείτε το πλήθος των βακτηριδίων ύστερα από 6 ώρες.

(Μονάδες 9)

B. Στο τέλος της έκτης ώρας ο πληθυσμός των βακτηριδίων ψεκάζεται με μια ουσία η οποία σταματά τον πολλαπλασιασμό τους και συγχρόνως προκαλεί την καταστροφή $3^3 \cdot 10$ βακτηριδίων ανά ώρα.

1. Να βρείτε το πλήθος των βακτηριδίων που απομένουν 20 ώρες μετά τον ψεκασμό.

(Μονάδες 8)

2. Μετά από πόσες ώρες από τη στιγμή του ψεκασμού θα καταστραφούν όλα τα βακτηρίδια;

(Μονάδες 8)

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Ζήτημα 1ο

A.1. Ο τύπος που δίνει τον νιοστό όρο μιας αριθμητικής προόδου με πρώτο όρο a_1 και διαφορά ω είναι:

$$a_v = a_1 + (v - 1)\omega.$$

A.2. Η σχέση που συνδέει τρεις διαδοχικούς όρους μιας αριθμητικής προόδου είναι:

$$2\beta = a + \gamma \Leftrightarrow \beta = (a + \gamma)/2$$

A.3. Έστω $a_1, a_2, a_3, \dots, a_v$ οι v πρώτοι διαδοχικοί όροι μιας γεωμετρικής προόδου. Τότε το άθροισμά τους S_v θα είναι:

$$S_v = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_v \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow S_v = a_1 + a_1\lambda + a_1\lambda^2 + \dots + a_1\lambda^{v-1} \quad (1)$$

Πολλαπλασιάζουμε τα μέλη της (1) επί λ και έχουμε:

$$\lambda \cdot S_v = a_1\lambda + a_1\lambda^2 + \dots + a_1\lambda^v \quad (2)$$

Αφαιρούμε από τη σχέση (2) τη σχέση (1) και έχουμε:

$$\lambda S_v - S_v = a_1\lambda^v - a_1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\lambda - 1)S_v = a_1(\lambda^v - 1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow S_v = a_1(\lambda^v - 1)/(\lambda - 1), \text{ αφού } \lambda \neq 1.$$

B.1. Ο νιοστός όρος μιας αριθμητικής προόδου δίνεται από τον τύπο:

$$a_v = a_1 + (v - 1)\omega.$$

Αντικαθιστούμε σ' αυτόν τις τιμές των a_1 και ω της στήλης A και βρίσκουμε:

α. Αν $a_1 = 1$ και $\omega = -2$ τότε:

$$a_v = 1 + (v - 1) \cdot (-2) \Leftrightarrow a_v = -2v + 3.$$

β. Αν $a_1 = 0$ και $\omega = 3$ τότε:

$$a_v = 0 + (v - 1) \cdot 3 \Leftrightarrow a_v = 3v - 3.$$

γ. Αν $a_1 = -1$ και $\omega = -1$ τότε:

$$a_v = -1 + (v - 1) \cdot (-1) \Leftrightarrow a_v = -v.$$

Επομένως:

$$\alpha \leftrightarrow 3, \quad \beta \leftrightarrow 4, \quad \gamma \leftrightarrow 1$$

B.2.

α. Έχουμε $\alpha = -5, \beta = 5, \gamma = 15$.

Για να είναι οι αριθμοί α, β και γ διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, πρέπει:

$$2\beta = \gamma + \alpha \Leftrightarrow 2 \cdot 5 = 15 + (-5),$$

που ισχύει. Άρα η πρόταση είναι **σωστή**.

β. Η αριθμητική πρόοδος έχει $a_1 = 10, \omega = -3$, οπότε:

$$a_{20} = a_1 + (20 - 1)\omega = 10 + 19 \cdot (-3) \Leftrightarrow a_{20} = -47,$$

άρα η πρόταση είναι **λάθος**.

γ. Αφού έχουμε αριθμητική πρόοδο, θα ισχύει:

$$a_4 = a_1 + 3\omega, \quad a_2 = a_1 + \omega, \quad a_6 = a_1 + 5\omega.$$

$$\text{Τότε: } 2a_4 = a_2 + a_6 \Leftrightarrow 2(a_1 + 3\omega) = a_1 + \omega + a_1 + 5\omega,$$

που ισχύει, άρα η πρόταση είναι **σωστή**.

Επομένως:

$$\alpha \leftrightarrow \Sigma, \quad \beta \leftrightarrow \Lambda, \quad \gamma \leftrightarrow \Sigma$$

B.3. Έχουμε γεωμετρική πρόοδο με $a_1 = 1$ και $\lambda = 2$, οπότε:

$$S_n = a_1 \frac{\lambda^n - 1}{\lambda - 1} = 1 \cdot \frac{2^n - 1}{2 - 1} = 2^n - 1$$

Άρα η σωστή απάντηση είναι η **B**.

Ζήτημα 2ο

α) Επειδή ο αριθμός $x = 1$ είναι ρίζα του πολυωνύμου $P(x)$ θα έχουμε $P(1) = 0$, κι αφού η διαίρεση του $P(x)$ με το $x + 1$ αφήνει υπόλοιπο 2, έχουμε: $P(-1) = 2$. Οπότε:

$$\begin{cases} P(1) = 0 \\ P(-1) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + (\beta - 1) - 3 - 2\beta + 6 = 0 \\ -\alpha + (\beta - 1) + 3 - 2\beta + 6 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha - \beta = -2 \\ -\alpha - \beta = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta = 4 \end{cases}$$

Για τις τιμές $\alpha = 2$ και $\beta = 4$ το πολυώνυμο $P(x)$ γράφεται:

$$P(x) = 2x^3 + 3x^2 - 3x - 2.$$

$$\begin{aligned} \beta) \quad P(x) = 0 &\Leftrightarrow 2x^3 + 3x^2 - 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow 2(x^3 - 1) + 3x(x - 1) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2(x - 1)(x^2 + x + 1) + 3x(x - 1) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x - 1)(2x^2 + 2x + 2 + 3x) = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(2x^2 + 5x + 2) = 0 \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = 0 & \text{ή} \\ 2x^2 + 5x + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 & \text{ή} \\ x = -2 & \text{ή} \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Άρα: $x = 1$ ή $x = -2$ ή $x = -(1/2)$.

Ζήτημα 3ο

α) Γνωρίζουμε ότι:

$$\eta\mu 2x = 2 \eta\mu x \cos x, \quad \eta\mu^2 x = \frac{1 - \sigma\upsilon\nu 2x}{2}, \quad \sigma\upsilon\nu^2 x = \frac{1 + \sigma\upsilon\nu 2x}{2}$$

οπότε:

$$f(x) = 2\eta\mu x \cos x - 2\eta\mu^2 x - 4\sigma\upsilon\nu^2 x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x) = \eta\mu 2x - 2 \frac{1 - \sigma\upsilon\nu 2x}{2} - 4 \frac{1 + \sigma\upsilon\nu 2x}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x) = \eta\mu 2x - 1 + \sigma\upsilon\nu 2x - 2 - 2\sigma\upsilon\nu 2x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x) = \eta\mu 2x - \sigma\upsilon\nu 2x - 3.$$

Έστω $g(x) = \eta\mu 2x - \sigma\upsilon\nu 2x$, $x \in \mathbb{R}$. Τότε:

$$\rho = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2} \quad (1)$$

$$\eta\mu\varphi = \frac{\beta}{\rho} = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad (2)$$

$$\sigma\upsilon\nu\varphi = \frac{\alpha}{\rho} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (3)$$

Από τις (2) και (3) προκύπτει ότι:

$$\varphi = -\frac{\pi}{4}$$

Επομένως:

$$g(x) = \sqrt{2}\eta\mu\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$$

και

$$f(x) = \sqrt{2}\eta\mu\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) - 3$$

β) Η f παίρνει τη μέγιστη τιμή όταν το

$$\eta\mu\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$$

γίνεται μέγιστο, δηλαδή όταν το ημίτονο είναι ίσο με 1. Επομένως πρέπει:

$$\eta\mu\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow \eta\mu\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \eta\mu\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - \frac{\pi}{4} = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2} \\ 2x - \frac{\pi}{4} = 2\kappa\pi + \pi - \frac{\pi}{2} \end{cases}, \text{ με } \kappa \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}, \text{ με } \kappa \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \kappa\pi + \frac{3\pi}{8}, \text{ με } \kappa \in \mathbb{Z}$$

Τότε η μέγιστη τιμή είναι:

$$f\left(\kappa\pi + \frac{3\pi}{8}\right) = \sqrt{2} \cdot 1 - 3 \Leftrightarrow f\left(\kappa\pi + \frac{3\pi}{8}\right) = \sqrt{2} - 3, \text{ με } \kappa \in \mathbb{Z}$$

γ) $f(x) - f\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\eta\mu\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) - 3 - \sqrt{2}\eta\mu\left[2\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\pi}{4}\right] + 3 = \sqrt{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\eta\mu\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) - \sqrt{2}\eta\mu\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \eta\mu\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) - \eta\mu\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \eta\mu 2x \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{4} - \eta\mu \frac{\pi}{4} \cdot \sigma\upsilon\nu 2x - \eta\mu 2x \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{4} - \eta\mu \frac{\pi}{4} \cdot \sigma\upsilon\nu 2x = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\eta\mu \frac{\pi}{4} \cdot \sigma\upsilon\nu 2x - \eta\mu \frac{\pi}{4} \cdot \sigma\upsilon\nu 2x = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2 \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sigma\upsilon\nu 2x = 1 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu 2x = \frac{1}{-\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu 2x = \sigma\upsilon\nu \frac{3\pi}{4} \Leftrightarrow 2x = 2\kappa\pi \pm \frac{3\pi}{4}, \text{ όπου } \kappa \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \kappa\pi \pm \frac{3\pi}{8}, \text{ όπου } \kappa \in \mathbb{Z}$$

Όμως, $x \in [0, \pi]$ δηλαδή $0 \leq x \leq \pi$. Επομένως:

- Av

$$x = \kappa\pi + \frac{3\pi}{8} :$$

$$0 \leq \kappa\pi + \frac{3\pi}{8} \leq \pi, \text{ με } \kappa \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow -\frac{3\pi}{8} \leq \kappa\pi \leq \frac{5\pi}{8}, \text{ με } \kappa \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{3}{8} \leq \kappa \leq \frac{5}{8}, \text{ με } \kappa \in \mathbb{Z}$$

άρα $\kappa = 0$ και

$$x = \frac{3\pi}{8}$$

- Av

$$x = \kappa\pi - \frac{3\pi}{8} :$$

$$0 \leq \kappa\pi - \frac{3\pi}{8} \leq \pi, \text{ με } \kappa \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{3\pi}{8} \leq \kappa\pi \leq \frac{11\pi}{8}, \text{ με } \kappa \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{8} \leq \kappa \leq \frac{11}{8}, \text{ με } \kappa \in \mathbb{Z}$$

άρα $\kappa = 1$ και

$$x = \frac{5\pi}{8}$$

Ζήτημα 4ο

- A. Επειδή ο πληθυσμός των βακτηριδίων τριπλασιάζεται κάθε ώρα, σημειώνει ότι αποτελεί γεωμετρική πρόοδο με λόγο $\lambda = 3$.
Επειδή αρχικά έχουμε 10 βακτηρίδια, στο τέλος της πρώτης ώρας θα υπάρχουν 30 βακτηρίδια, άρα $a_1 = 30$. Επομένως:

$$a_v = a_1 \cdot \lambda^{v-1} \Leftrightarrow a_v = 30 \cdot 3^{v-1}$$

και:

$$a_6 = 30 \cdot 3^{6-1} = 30 \cdot 3^5 = 30 \cdot 243 \Leftrightarrow a_6 = 7.290 \text{ βακτηρίδια.}$$

- B.1. Επειδή με τον ψεκασμό καταστρέφονται $3^3 \cdot 10$ βακτηρίδια, σε 20 ώρες θα έχουν καταστραφεί:

$$3^3 \cdot 10 \cdot 20 = 27 \cdot 200 = 5.400 \text{ βακτηρίδια.}$$

Άρα απομένουν:

$$7.290 - 5.400 = 1.890 \text{ βακτηρίδια.}$$

- B.2. Έστω ότι τα βακτηρίδια καταστρέφονται μετά από t ώρες. Τότε θα πρέπει:

$$t \cdot 3^3 \cdot 10 = 7.290 \Leftrightarrow 270t = 7.290 \Leftrightarrow t = 7.290/270 \Leftrightarrow t = 27 \text{ ώρες}$$

Επομένως όλα τα βακτηρίδια θα έχουν καταστραφεί μετά από 27 ώρες.