<u>ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ</u>

ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ & ΕΠΑ.Λ. Β΄

27 ΜΑΪΟΥ 2013

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία σελ. 334, σχολικού βιβλίου.

Α2. Θεωρία σελ. 247, σχολικού βιβλίου.

Α3. Θεωρία σελ. 222, σχολικού βιβλίου.

Α4. **α)** $\to$ Λ, **β)** $\to$ Σ, **γ)** $\to$ Σ, **δ)** $\to$ Λ, **ε)** $\to$ Σ.

ΘΕΜΑ Β

Β1.

- Η δοσμένη σχέση γράφεται:
  $|z-2|^2 + |z-2| = 2 \Leftrightarrow |z-2|^2 + |z-2| - 2 = 0$.
  Αν $|z-2| = y$ είναι $y^2 + y - 2 = 0 \Leftrightarrow y = 1$ ή $y = -2$.
  Όμως $y = |z-2| \geq 0$ άρα $|z-2| = 1$.
  Οπότε ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των z είναι κύκλος με κέντρο Κ(2, 0) και ακτίνα ρ = 1.
- Εξάλλου είναι $|z| = |z-2+2| \leq |z-2| + |2| = 1 + 2 = 3$ άρα $|z| \leq 3$.

Σημείωση: Η τελευταία ανίσωση μπορεί να προκύψει και γεωμετρικά.

Β2. Είναι $z_{1,2} = \dfrac{-\beta \pm \sqrt{-\Delta}\, i}{2} = \dfrac{-\beta \pm \sqrt{4\gamma - \beta^2}\, i}{2}$, οπότε

$$\left|\mathrm{Im}(z_1) - \mathrm{Im}(z_2)\right| = 2 \Leftrightarrow \left|\pm \frac{2\sqrt{4\gamma-\beta^2}}{2}\right| = 2 \Leftrightarrow 4\gamma - \beta^2 = 4 \quad (1).$$

Επειδή $z_{1,2}$ ανήκουν στον γεωμετρικό τόπο του ερωτήματος Β1 είναι:

$$\left(-\frac{\beta}{2} - 2\right)^2 + \left(\pm\frac{\sqrt{4\gamma-\beta^2}}{2}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{\beta}{2} + 2\right)^2 + \frac{4\gamma - \beta^2}{4} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\beta^2}{4} + 2\beta + 4 + \gamma - \frac{\beta^2}{4} = 1 \Leftrightarrow 2\beta + \gamma = -3 \quad (2).$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει $\beta = -4$ και $\gamma = 5$.

(2ος τρόπος)

Οι μιγαδικοί z_1, z_2 είναι συζυγείς, άρα μπορούμε να θέσουμε
$z_1 = x + yi,\ z_2 = x - yi,\ \ x, y \in \mathbb{R}$.
Η σχέση $\left|\mathrm{Im}(z_1) - \mathrm{Im}(z_2)\right| = 2$ γράφεται τώρα $|2y| = 2 \Leftrightarrow |y| = 1 \Leftrightarrow y = \pm 1$.
Έτσι $z_{1,2} = x \pm i$. Επειδή $z_{1,2}$ ανήκουν στον τόπο του ερωτήματος 1είναι
$\left|z_{1,2} - 2\right| = 1 \Leftrightarrow |x \pm i - 2| = 1 \Leftrightarrow \sqrt{(x-2)^2 + (\pm 1)^2} = 1 \Leftrightarrow$
$(x-2)^2 + 1 = 1 \Leftrightarrow (x-2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$.
Έτσι όμως $z_{1,2} = 2 \pm i$. Από τις σχέσεις του Vieta προκύπτουν:
$z_1 + z_2 = -\beta \Leftrightarrow 4 = -\beta \Leftrightarrow \beta = -4$.
$z_1 \cdot z_2 = \gamma \Leftrightarrow \gamma = 5$.

Β3. Έστω $|\nu| \geq 4$. Έχουμε $\nu^3 + \alpha_2\nu^2 + \alpha_1\nu + \alpha_0 = 0 \Leftrightarrow \nu^3 = -\alpha_2\nu^2 - \alpha_1\nu - \alpha_0$.
Άρα $|\nu|^3 = \left|-\alpha_2\nu^2 - \alpha_1\nu - \alpha_0\right| = \left|\alpha_2\nu^2 + \alpha_1\nu + \alpha_0\right|$.
Λόγω της τριγωνικής ανισότητας είναι $|\nu|^3 = \left|\alpha_2\nu^2 + \alpha_2\nu + \alpha_0\right| \leq \left|\alpha_2\nu^2\right| + \left|\alpha_1\nu\right| + \left|\alpha_0\right| =$
$= |\alpha_2| \cdot \left|\nu^2\right| + |\alpha_1| \cdot |\nu| + |\alpha_0|$.
Από Β$_1$ είναι $|\alpha_0| \leq 3,\ |\alpha_1| \leq 3,\ |\alpha_2| \leq 3$, άρα
$\left|\alpha_2\nu^2 + \alpha_1\nu + \alpha_0\right| \leq 3|\nu|^2 + 3|\nu| + 3 = 3\left(|\nu|^2 + |\nu| + 1\right)$.
Η τελευταία γράφεται $|\nu|^3 \leq 3\dfrac{|\nu|^3 - 1}{|\nu| - 1}$ (είναι $|\nu| - 1 > 0$ αφού $|\nu| \geq 4$) $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow |\nu|^3\left(|\nu| - 1\right) \leq 3\left(|\nu|^3 - 1\right) \Leftrightarrow |\nu|^4 \leq 4|\nu|^3 - 3$.
Όμως $4 \cdot |\nu|^3 - 3 < 4 \cdot |\nu|^3$ άρα $|\nu|^4 < 4 \cdot |\nu|^3 \Leftrightarrow |\nu| < 4$ που είναι άτοπο.
Άρα $|\nu| < 4$.

(2ος τρόπος)

Είναι $\nu^3 + \alpha_2\nu^2 + \alpha_1\nu + \alpha_0 = 0 \Leftrightarrow \nu^3 = -\alpha_2\nu^2 - \alpha_1\nu - \alpha_0$.
Άρα $|\nu|^3 = \left|-\alpha_2\nu^2 - \alpha_1\nu - \alpha_0\right| = \left|\alpha_2\nu^2 + \alpha_1\nu + \alpha_0\right|$.
Λόγω της τριγωνικής ανισότητας είναι $|\nu|^3 = \left|\alpha_2\nu^2 + \alpha_1\nu + \alpha_0\right| \leq \left|\alpha_2\nu^2\right| + \left|\alpha_1\nu\right| + \left|\alpha_0\right| =$
$= |\alpha_2| \cdot |\nu|^2 + |\alpha_1| \cdot |\nu| + |\alpha_0|$.
Από το Β$_1$ είναι $|\alpha_0| \leq 3,\ |\alpha_1| \leq 3,\ |\alpha_2| \leq 3$, άρα
$\left|\alpha_2\nu^2 + \alpha_1\nu + \alpha_0\right| \leq 3|\nu|^2 + 3|\nu| + 3 = 3\left(|\nu|^2 + |\nu| + 1\right)$. Δηλαδή $|\nu|^3 \leq 3\left(|\nu|^2 + |\nu| + 1\right)$ (1).
Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:
α) $|\nu| = 1$, τότε $|\nu| < 4$ και ισχύει το ζητούμενο.

β) $|\nu| \neq 1$, τότε η (1) γράφεται: $|\nu|^3 \le \dfrac{3\left(|\nu|^3-1\right)}{|\nu|-1}$ (2).

β₁) Αν $|\nu| < 1$, τότε $|\nu| < 4$ και ισχύει το ζητούμενο.

β₂) Αν $|\nu| > 1$, τότε η (2) γράφεται $|\nu|^3\left(|\nu|-1\right) \le 3\left(|\nu|^3-1\right) \Leftrightarrow |\nu|^4 \le 4|\nu|^3 - 3$.

Όμως $4|\nu|^3 - 3 < 4|\nu|^3$, άρα $|\nu|^4 < 4|\nu|^3$ και επειδή $|\nu| > 1$, προκύπτει $|\nu| < 4$.

(3ος τρόπος)

Από τη δοσμένη σχέση, όπως δείχτηκε και στον 2ο τρόπο προκύπτει:

$$|\nu|^3 \le 3\left(|\nu|^2+|\nu|+1\right) \Leftrightarrow |\nu|^3 - 3|\nu|^2 - 3|\nu| - 3 \le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |\nu|^3 - 4|\nu|^2 + |\nu|^2 - 4|\nu| + |\nu| - 4 + 1 \le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |\nu|^2\left(|\nu|-4\right) + |\nu|\left(|\nu|-4\right) + \left(|\nu|-4\right) + 1 \le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(|\nu|-4\right)\left(|\nu|^2+|\nu|+1\right) + 1 \le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(|\nu|-4\right)\left(|\nu|^2+|\nu|+1\right) \le -1 < 0.$$

Όμως $|\nu|^2 + |\nu| + 1 > 0$, άρα $|\nu| - 4 < 0 \Leftrightarrow |\nu| < 4$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Για $x \in \mathbb{R}$ η δοσμένη σχέση γράφεται:

$$\left(f(x)+x\right)\left(f(x)+x\right)' = \left(\frac{x^2}{2}\right)' \Leftrightarrow \left[\frac{\left(f(x)+x\right)^2}{2}\right]' = \left(\frac{x^2}{2}\right)' \Leftrightarrow \frac{\left(f(x)+x\right)^2}{2} = \frac{x^2}{2} + c.$$

Για $x = 0$: $\dfrac{1}{2} = c$.

Έτσι $\dfrac{\left(f(x)+x\right)^2}{2} = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \left(f(x)+x\right)^2 = x^2 + 1$.

Θέτουμε $g(x) = f(x) + x, \quad x \in \mathbb{R}$. Είναι $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $g(x)$ συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα διατηρεί σταθερό πρόσημο. Επειδή $g(0) = f(0) > 0$ θα είναι $g(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, δηλαδή $f(x) + x > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Άρα $f(x) + x = \sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow f(x) = \sqrt{x^2+1} - x, \quad x \in \mathbb{R}$.

Γ2. Είναι $f\left(g(x)\right) = \sqrt{g^2(x)+1} - g(x) = 1$.

Άρα $\sqrt{g^2(x)+1} - g(x) = 1 \Leftrightarrow \sqrt{g^2(x)+1} = g(x) + 1 \quad (1)$.

Πρέπει $g(x)+1>0 \Leftrightarrow x^3+\dfrac{3x^2}{2}>0 \Leftrightarrow x^2\left(x+\dfrac{3}{2}\right)>0 \Leftrightarrow x\in\left(-\dfrac{3}{2},0\right)\cup(0,+\infty)$.

Τότε από την (1) προκύπτει:

$$g^2(x)+1=g^2(x)+1+2g(x) \Leftrightarrow g(x)=0 \Leftrightarrow x^3+\frac{3x^2}{2}-1=0 \Leftrightarrow 2x^3+3x^2-2=0.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(x)=2x^3+3x^2-2,\quad x\in\mathbb{R}$.
Είναι $\varphi'(x)=6x^2+6x=6x(x+1)$.
Άρα έχουμε τον επόμενο πίνακα μεταβολής:

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
φ΄(x)		+	0	-	0	+	
φ(x)		↗		↘		↗	

Προκύπτει τοπικό μέγιστο $\varphi(-1)=-1$ και τοπικό ελάχιστο $\varphi(0)=-2$. Επίσης προκύπτει ότι το σύνολο τιμών της φ για $x\in[0,+\infty)$ είναι το $[-2,+\infty)$, ενώ για $x<0$ είναι $\varphi(x)<0$.
Έτσι προκύπτει ότι υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα για την φ στο $(0,+\infty)$ και επειδή η φ είναι γνησίως αύξουσα σε αυτό, προκύπτει ότι η ρίζα είναι μοναδική.

(2ος τρόπος)

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$f'(x)=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}-1=\frac{x-\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{-f(x)}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Επίσης είναι $f(x)=\sqrt{x^2+1}-x>\sqrt{x^2}-x=|x|-x\geq 0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, άρα

$f(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Έτσι όμως $f'(x)<0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ και άρα 1 – 1.
Η εξίσωση τώρα $f\left(g(x)\right)=1$ γράφεται $f\left(g(x)\right)=f(0)\Leftrightarrow g(x)=0\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x^3+\frac{3x^2}{2}-1=0.$$

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $g'(x)=3x^2+3x=3x(x+1)\quad x\in\mathbb{R}$.
Ο πίνακας μεταβολών της g είναι:

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
g΄(x)		+	0	-	0	+	
g(x)		↗		↘		↗	

- $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}(x^3) = -\infty$, $g(-1) = -\dfrac{1}{2}$, g συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,-1]$, άρα $g\big((-\infty,-1]\big) = \left(-\infty,-\dfrac{1}{2}\right]$. Άρα η g δεν έχει ρίζα $(-\infty,-1]$.
- $g(-1) = -\dfrac{1}{2}$, $g(0) = -1$ και g συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $[-1,0]$, άρα $g\big([-1,0]\big) = \left[-1,-\dfrac{1}{2}\right]$. Άρα η g δεν έχει ρίζα $[-1,0]$.
- $g(0) = -1$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}(x^3) = +\infty$, g συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$, άρα $g\big([0,+\infty)\big) = [-1,+\infty)$.

Παρατηρούμε ότι $0 \in g\big([0,+\infty)\big)$, άρα υπάρχει $x_0 \in (0,+\infty)$ ώστε $g(x_0) = 0$, που είναι και μοναδική αφού g είναι γνησίως αύξουσα.

Γ3. Θέτουμε $K(x) = \int_{x-\pi/4}^{0} f(t)dt - f\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)\cdot$ εφx, $x \in \left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$.

Η K είναι συνεχής στο $\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$, ενώ επειδή $f(t) = \sqrt{t^2+1} - t > 0$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$ θα είναι $\int_{-\pi/4}^{0} f(t)dt > 0$, δηλαδή $K(0) > 0$.

Επίσης είναι $K\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = -f(0)\cdot$ εφ$\dfrac{\pi}{4} = -1 < 0$.

Έτσι όμως από το θεώρημα Bolzano προκύπτει ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in \left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$ τέτοιο ώστε $K(x_0) = 0$ ή $\int_{x_0-\pi/4}^{0} f(t)dt = f\left(x_0-\dfrac{\pi}{4}\right)$εφ$x_0$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

$$\lim_{h\to0}\frac{f(1+5h)-f(1)-f(1-h)+f(1)}{h} = \lim_{h\to0}\left[5\cdot\frac{f(1+5h)-f(1)}{5h} - \frac{f(1-h)-f(1)}{h}\right] =$$

$$= 5f'(1) + f'(1) = 6f'(1).$$

διότι

- $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(1+5h)-f(1)}{h} = \lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(1+5h)-f(1)}{5h}\cdot 5 \underset{\substack{h\to0\\u\to0}}{\overset{5h=u}{=}} 5\lim\limits_{u\to0}\dfrac{f(1+u)-f(1)}{u} = 5f'(1).$
- $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(1-h)-f(1)}{h} = -\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(1-h)-f(1)}{-h} \underset{\substack{h\to0\\u\to0}}{\overset{-h=t}{=}} -\lim\limits_{t\to0}\dfrac{f(1+t)-f(1)}{t} = f'(1).$

Άρα αφού

$$\lim_{h\to0}\frac{f(1+5h)-f(1-h)}{h} = 0 \Leftrightarrow 6f'(1) = 0 \Leftrightarrow f'(1) = 0.$$

Για $0 < x < 1 \overset{f'\uparrow}{\Rightarrow} f'(x) < f'(1) \Rightarrow f'(x) < 0$.

Για $x > 1 \overset{f'\uparrow}{\Rightarrow} f'(x) > f'(1) \Rightarrow f'(x) > 0$.

Άρα η f είναι $\downarrow$ στο $(0,1]$ και $\uparrow$ στο $[1,+\infty)$ με $f'(1) = 0$ άρα παρουσιάζει ελάχιστο στο $x = 1$.

Δ2. Η συνάρτηση $\dfrac{f(t)-1}{t-1}$ συνεχής στο $(1,+\infty)$ άρα η g παραγωγίσιμη με

$$g'(x) = \frac{f(x)-1}{x-1}, \quad x \in (1,+\infty).$$

Λόγω του $Δ_1$, αφού στο $x_0 = 1$ η f παρουσιάζει ελάχιστο, είναι $f(x) \geq f(1) = 1$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

Η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 1$, άρα $f(x) > 1$ για $x \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$.

Έτσι $f(x) - 1 > 0$ για $x \in (1, +\infty)$ και $x - 1 > 0$, άρα $g'(x) > 0$ για κάθε $x \in (1, +\infty)$.

Άρα g γνησίως αύξουσα στο $(1, +\infty)$.

Θεωρούμε τώρα την συνάρτηση $\varphi(x) = \int_x^{x+1} g(u)du,\ x \in (1,+\infty)$.

Είναι $\varphi'(x) = g(x+1) - g(x)$.

Όμως $x < x + 1$ και επειδή g γνησίως αύξουσα θα είναι $g(x) < g(x + 1)$,

άρα $\varphi'(x) > 0$, άρα φ γνησίως αύξουσα στο $(1,+\infty)$.

Είναι $8x^2 + 5 > 1$ και $2x^4 + 5 > 1$, οπότε η δοσμένη ανίσωση γράφεται:

$$\varphi(8x^2+5) > \varphi(2x^4+5) \overset{\varphi\uparrow}{\Leftrightarrow} 8x^2 + 5 > 2x^4 + 5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^4 < 4x^2 \Leftrightarrow x^2(x^2 - 4) < 0 \Leftrightarrow x \in (-2, 0) \cup (0, 2).$$

Δ3. Είναι $g''(x = \dfrac{(f(x)-1)'(x-1)-(f(x)-1)(x-1)'}{(x-1)^2} = \dfrac{f'(x)(x-1)-(f(x)-1)}{(x-1)^2}$.

Για την f στο $[1, x]$ ισχύει το Θ.Μ.Τ. άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον

$$\xi \in (1,x): \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = f'(\xi) \Rightarrow \frac{f(x)-1}{x-1} = f'(\xi) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x) - 1 = (x - 1)f'(\xi).$$

Άρα $g''(x) = \dfrac{f'(x)(x-1)-(x-1)f'(\xi)}{(x-1)^2} = \dfrac{f'(x)-f'(\xi)}{x-1}$.

Είναι $\xi < x \overset{f'\uparrow}{\Rightarrow} f'(\xi) < f'(x) \Rightarrow f'(x) - f'(\xi) > 0$.

Επίσης για $x > 1 \Rightarrow x - 1 > 0$.

Έτσι $g''(x) > 0$ για κάθε $x > 1$ άρα g κυρτή στο $(1, +\infty)$.

Η δοσμένη εξίσωση γράφεται

$$(a-1)g(x) = (f(a)-1)(x-a) \overset{a>1}{\Longleftrightarrow} g(x) = \frac{f(a)-1}{a-1}(x-a) \Leftrightarrow g(x) = g'(a)(x-a).$$

Η εξίσωση της εφαπτομένης για την g στο $x = \alpha$ είναι

$$y - g(a) = g'(a)(x-a) \overset{g(a)=0}{\Longleftrightarrow} y = g'(a)(x-a).$$

Αφού g κυρτή η γραφική της παράσταση βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη με εξαίρεση το σημείο επαφής.

Δηλαδή $g(x) \geq y \Rightarrow g(x) \geq g'(a)(x-a)$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x = \alpha$.
Άρα η εξίσωση $g(x) = g'(a)(x-a)$ έχει μοναδική λύση $x = \alpha$.

(2ος τρόπος)

Η δοσμένη εξίσωση γράφεται: $(a-1)\int_a^x \frac{f(t)-1}{t-1}dt - (f(a)-1)(x-a) = 0, \quad x > 1$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = (a-1)\int_a^x \frac{f(t)-1}{t-1}dt - (f(a)-1)(x-a), \quad x > 1$.

Η h είναι παραγωγίσιμη με

$$h'(x) = (a-1)\frac{f(x)-1}{x-1} - \left(f(a)-1\right) = (a-1)\left[\frac{f(x)-1}{x-1} - \frac{f(a)-1}{a-1}\right] = (a-1)\left(g'(x)-g'(a)\right).$$

Η g είναι κυρτή άρα η g' γίνεται αύξουσα και επομένως

- με $x < a \Rightarrow g'(x) < g'(a) \Rightarrow g'(x) - g'(a) < 0 \Rightarrow h'(x) < 0$.
- με $x > a \Rightarrow g'(x) > g'(a) \Rightarrow g'(x) - g'(a) > 0 \Rightarrow h'(x) > 0$.
- $h'(\alpha) = 0$.

Άρα προκύπτει ότι η h έχει ελάχιστη τιμή στη θέση $x_0 = \alpha$, την $h(\alpha) = 0$ που συνακόλουθα είναι και μοναδική.

x	1		α		+∞
h΄(x)		-	0	+	
h(x)		↘		↗	

ολικό ελάχιστο