

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι

ΕΠΑ.Λ. Α' & Β'

23 ΜΑΪΟΥ 2013

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω συνεχής συνάρτηση $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ με παράγουσα συνάρτηση F . Τη σταθερή διαφορά $F(\beta) - F(\alpha)$ ονομάζουμε ορισμένο ολοκλήρωμα της συνάρτησης f από το α ως το β και το συμβολίζουμε: $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$.

A2. $\alpha \rightarrow \Sigma, \beta \rightarrow \Sigma, \gamma \rightarrow \Lambda, \delta \rightarrow \Lambda, \varepsilon \rightarrow \Sigma$.

A3. α) $\int_{\alpha}^{\beta} \eta \mu x dx = [-\sigma \nu x]_{\alpha}^{\beta} = -\sigma \nu \beta + \sigma \nu \alpha$.

β) $(cf)'(x) = cf'(x)$.

γ) $(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}$.

ΘΕΜΑ Β

B1. $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (\alpha^2 x + \ln x) = \alpha^2 \cdot 1 + \ln 1 = \alpha^2$.

B2. $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - x}{\sqrt{x+3} - 2} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}{(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)} =$
 $= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}{x+3-4} = \lim_{x \rightarrow 1^+} x(\sqrt{x+3}+2) = 1(\sqrt{1+3}+2) = 4$.

B3. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$, όταν
 $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) \Leftrightarrow \alpha^2 = 4 \Leftrightarrow \alpha = 2 \quad \text{ή} \quad \alpha = -2$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

Μισθός (εκατοντάδες €) x_i	Συχνότητα (αριθμός υπαλλήλων) v_i	Σχετική συχνότητα $f_i\%$	$x_i v_i$
6	25	$25/50 = 50\%$	150
10	17	$17/50 = 34\%$	170
15	6	$6/50 = 12\%$	90
20	2	$2/50 = 4\%$	40
Σύνολα	50	100	450

Γ2.
$$\bar{x} = \frac{x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 + x_4 v_4}{v} = \frac{450}{50} = 9.$$

Γ3. Το ποσοστό των υπαλλήλων με μισθό το πολύ 1000 € είναι $50\% + 34\% = 84\%$.

Γ4.
$$s^2 = \frac{v_1(x_1 - \bar{x})^2 + v_2(x_2 - \bar{x})^2 + v_3(x_3 - \bar{x})^2 + v_4(x_4 - \bar{x})^2}{v} =$$
$$= \frac{25(6-9)^2 + 17(10-9)^2 + 6(15-9)^2 + 2(20-9)^2}{50} =$$
$$= \frac{25 \cdot 9 + 17 \cdot 1 + 6 \cdot 36 + 2 \cdot 121}{50} = \frac{700}{50} = 14.$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $f'(x) = [(x-2)^2 \cdot (x+\alpha)]' = [(x-2)^2]' \cdot (x+\alpha) + (x-2)^2 \cdot (x+\alpha)' =$
 $2(x-2)(x+\alpha) + (x-2)^2 = (x-2)(2x+2\alpha+x-2) = (x-2)(3x+2\alpha-2), x \in \mathbb{R}.$

Δ2. Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} και παρουσιάζει ακρότατο στο $x_0 = 4$, θα είναι $f'(4) = 0$.

Όμως $f'(x) = (x-2)(3x+2\alpha-2)$ οπότε

$$(4-2)(3 \cdot 4 + 2\alpha - 2) = 0 \Leftrightarrow 2(10 + 2\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha = -5$$

Δ3. Για την τιμή $\alpha = -5$ είναι:

$$f(x) = (x-2)^2 \cdot (x-5) \text{ και } f'(x) = (x-2) \cdot (3x-12)$$

Λύνουμε την εξίσωση:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x-2) \cdot (3x-12) = 0 \Leftrightarrow x = 2 \text{ ή } x = 4.$$

και κατασκευάζουμε πίνακα μεταβολών της f .

x	$-\infty$	2	4	$+\infty$
f'	+	0	-	+
f	↗		↘	
		τ.max f(2)=0	τ.min f(4)=-4	

Δ4. Βρίσκουμε τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των g, h, λύνοντας την εξίσωση $g(x) = h(x)$.

$$g(x) = h(x) \Leftrightarrow 3x^2 - 12x = 6x - 24 \Leftrightarrow 3x^2 - 18x + 24 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3(x - 2)(x - 4) = 0 \Leftrightarrow x = 2 \text{ ή } x = 4.$$

Είναι $g(x) - h(x) = 3(x - 2)(x - 4)$.

Το πρόσημο της $g - h$ δίνεται από τον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$	2	4	$+\infty$
g(x)-h(x)	+	0	-	+

Έτσι

$$E(\Omega) = -\int_2^4 (3x^2 - 18x + 24) dx = -\left[x^3 - 9x^2 + 24x \right]_2^4 =$$

$$= -\left[(64 - 144 + 96) - (8 - 36 + 48) \right] = 4 \text{ τ.μ.}$$