

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ & ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ & ΕΠΑ.Λ. Β'
20 ΜΑΪΟΥ 2015
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

- A1.** Θεωρία, σχολ. βιβλίο σελ. 31.
- A2.** Λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, όταν και μόνον όταν το $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός.
- A3.** Ορισμός, σχολ. βιβλίο σελ. 86-87.
- A4.** α) Λ β) Σ γ) Λ δ) Λ ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

- B1.** Το σύνολο λύσεων της εξίσωσης $(3x-1)(8x^2-6x+1)=0$ είναι $\left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right\}$, με $\frac{1}{4} < \frac{1}{3} < \frac{1}{2}$.
- Επειδή $A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$ έπεται $P(A \cap B) \leq P(A) \leq P(A \cup B)$ και επειδή οι πιθανότητες $P(A \cap B)$, $P(A)$, $P(A \cup B)$ είναι διαφορετικές ανά δύο μεταξύ τους, προκύπτει ότι $P(A \cap B) < P(A) < P(A \cup B)$
- Έτσι προκύπτει $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$, $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(A \cup B) = \frac{1}{2}$.
- B2.** $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow$
 $\Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{3} + P(B) - \frac{1}{4} \Leftrightarrow P(B) = \frac{5}{12}$.
- Για το ενδεχόμενο $A' - B'$ είναι:
 $A' - B' = A' \cap (B')' = A' \cap B = B - A$.
- Άρα $P(A' - B') = P(B - A) = P(B) - P(A \cap B) = \frac{5}{12} - \frac{1}{4} = \frac{5}{12} - \frac{3}{12} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$.
- Το ενδεχόμενο Δ ισούται με $(A \cap B)'$, οπότε
 $P(\Delta) = P[(A \cap B)'] = 1 - P(A \cap B) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

B3. Το ενδεχόμενο E ισούται με $(A - B) \cup (B - A)$ οπότε

$$\begin{aligned} P(E) &= P[(A - B) \cup (B - A)] = P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) = \\ &= P(A) + P(B) - 2P(A \cap B) = \frac{1}{3} + \frac{5}{12} - 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

B4. Η εξίσωση $9x^2 - 3x - 2 = 0$, έχει ρίζες $x_1 = \frac{2}{3}$, $x_2 = -\frac{1}{3}$. Άρα $P(\Gamma) = \frac{2}{3}$.

Αν τα ενδεχόμενα B, Γ ήταν ασυμβίβαστα θα ήταν

$$P(B \cup \Gamma) = P(B) + P(\Gamma) \Leftrightarrow P(B \cup \Gamma) = \frac{2}{3} + \frac{5}{12} \Leftrightarrow P(B \cup \Gamma) = \frac{13}{12} > 1, \text{ άτοπο.}$$

Άρα τα B, Γ δεν μπορεί να είναι ασυμβίβαστα.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Από τα δεδομένα προκύπτει $f_1 \% = 10$ και $f_5 \% = 30$. Επίσης είναι

$$f_3 = \frac{108}{360} = 0,3$$

Άρα $f_3 \% = 30$

Τα κέντρα των κλάσεων είναι $x_1 = 9$, $x_2 = 11$, $x_3 = 13$, $x_4 = 15$, $x_5 = 17$.

Από τον τύπο $\bar{x} = \sum_{i=1}^5 x_i \cdot f_i$ προκύπτει

$$14 = 9 \cdot 0,1 + 11 \cdot f_2 + 13 \cdot 0,3 + 15 \cdot f_4 + 17 \cdot 0,3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 14 = 11 \cdot f_2 + 15 \cdot f_4 + 9,9 \Leftrightarrow 11 \cdot f_2 + 15 \cdot f_4 = 4,1 \quad (1)$$

Επίσης είναι

$$f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5 + 1 \Leftrightarrow 0,1 + f_2 + 0,3 + f_4 + 0,3 = 1 \Leftrightarrow f_2 + f_4 = 0,3 \quad (2).$$

Από το σύστημα των (1), (2) : $\begin{pmatrix} 11f_2 + 15f_4 = 4,1 \\ f_2 + f_4 = 0,3 \end{pmatrix}$ προκύπτει $f_2 = 0,1$ και

$$f_4 = 0,2.$$

Άρα $f_2 \% = 10$ και $f_4 \% = 20$.

Κλάσεις	f_i %
[8, 10)	10
[10, 12)	10
[12, 14)	30
[14, 16)	20
[16, 18)	30

Γ2. Από τον τύπο $S^2 = \frac{1}{v} \sum_{i=1}^s (x_i - \bar{x})^2 v_i$

$$\text{προκύπτει } S^2 = \sum_{i=1}^5 \frac{v_i}{v} (x_i - \bar{x})^2 \Leftrightarrow S^2 = \sum_{i=1}^5 f_i (x_i - \bar{x})^2.$$

$$\text{Έτσι } S^2 = f_1 (x_1 - \bar{x})^2 + f_2 (x_2 - \bar{x})^2 + f_3 (x_3 - \bar{x})^2 + f_4 (x_4 - \bar{x})^2 + f_5 (x_5 - \bar{x})^2 =$$

$$= 0,1(9-14)^2 + 0,1(11-14)^2 + 0,3(13-14)^2 + 0,2(15-14)^2 + 0,3(17-14)^2 =$$

$$= 0,1 \cdot 25 + 0,1 \cdot 9 + 0,3 + 0,2 + 0,9 \cdot 9 = 2,5 + 0,9 + 0,3 + 0,2 + 2,7 = 6,6.$$

$$S^2 = 6,6 \quad \text{άρα} \quad S = \sqrt{6,6} \approx 2,57.$$

$$\text{Ισχύει ότι } CV = \frac{S}{|\bar{x}|} = \frac{2,57}{14} \approx 0,18 > 0,1.$$

Άρα το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

Γ3. Ισχύει ότι $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^5 \nu_i \cdot x_i}{\nu} \Leftrightarrow \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^4 \nu_i \cdot x_i + \nu_5 \cdot x_5}{\nu} \Leftrightarrow 14 = \frac{1780 + f_5 \cdot \nu \cdot x_5}{\nu} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 14 \cdot \nu = 1780 + 0,3 \cdot \nu \cdot 17 \Leftrightarrow 14 \cdot \nu - 5,1 \cdot \nu = 1780 \Leftrightarrow 8,9 \cdot \nu = 1780 \Leftrightarrow \nu = \frac{1780}{8,9} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \nu = 200$$

Γ4. Από την εφαρμογή της σελ 99 του σχολικού βιβλίου προκύπτει ότι αν δυο μεταβλητές x, y συνδέονται με τη σχέση $Y = \alpha X + \beta$ όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, τότε $\bar{y} = \alpha \bar{x} + \beta$ και $S_y = |\alpha| S_x$.

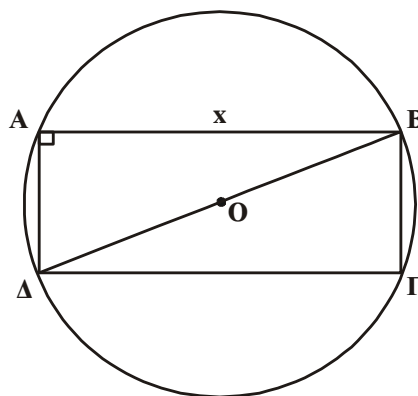
Από το δεδομένο $\beta_i = \frac{a_i - \bar{a}}{S_a} \Leftrightarrow \beta_i = \frac{1}{S_a} a_i - \frac{\bar{a}}{S_a}$, προκύπτει ότι οι μεταβλητές

α, β συνδέονται με τη σχέση $\beta = \frac{1}{S_a} \bar{a} - \frac{\bar{a}}{S_a}$.

Άρα $\bar{\beta} = \frac{1}{S_a} \bar{a} - \frac{\bar{a}}{S_a} = 0$ και $S_\beta = \left| \frac{1}{S_a} \right| S_a = \frac{1}{S_a} S_a = 1$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.



Το τμήμα $AB = x$, είναι χορδή του κύκλου, άρα $0 < x < 2 \cdot \rho \Leftrightarrow 0 < x < 10$.

Η γωνία ΔAB είναι ορθή, άρα η χορδή $B\Delta$ είναι διάμετρος του κύκλου.

Έτσι από το ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Delta$ είναι $AB = x$, $B\Delta = 10$ και άρα $A\Delta = \sqrt{10^2 - x^2} = \sqrt{100 - x^2}$.

Το εμβαδό του ορθογωνίου $AB\Gamma\Delta$ είναι $AB \cdot A\Delta = x \cdot \sqrt{100 - x^2} = f(x)$.


Δ2. Η f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0,10)$ με

$$f'(x) = \sqrt{100 - x^2} + x \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{100 - x^2}} = \sqrt{100 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{100 - x^2}} = \frac{100 - 2x^2}{\sqrt{100 - x^2}}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 100 - 2x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 50 \Leftrightarrow x = \sqrt{50} \quad \text{ή} \quad x = -\sqrt{50}.$$

Επειδή $x \in (0,10)$ προκύπτει $x = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$.

Προκύπτει ο επόμενος πίνακας μεταβολής.

x	0	$5\sqrt{2}$	10	
f'		+	Φ	-
f				

Συμπεραίνουμε ότι για την τιμή $x = 5\sqrt{2}$ η f παρουσιάζει μέγιστο. Για την τιμή αυτή είναι $A\Delta = \sqrt{100 - x^2} = \sqrt{100 - 50} = \sqrt{50}$, δηλ. $A\Delta = AB$, οπότε το ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ είναι τετράγωνο.

Δ3. Παρατηρούμε ότι $\sqrt{99} = 1 \cdot \sqrt{100 - 1^2} = f(1)$.

$$\begin{aligned} \text{Έτσι } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1+x) - \sqrt{99}}{98 \cdot x} &= \frac{1}{98} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x+1) - f(1)}{x} = \\ &= \frac{1}{98} \cdot f'(1) = \frac{1}{98} \cdot \frac{100 - 2 \cdot 1^2}{\sqrt{100 - 1^2}} = \frac{1}{98} \cdot \frac{98}{\sqrt{99}} = \frac{1}{\sqrt{99}} = \frac{\sqrt{99}}{99}. \end{aligned}$$

Δ4. Είναι $A - B \subseteq A$, άρα $P(A - B) \leq P(A)$ και επειδή $P(A - B) > 0$, $P(A) \leq 1$ είναι: $0 < P(A - B) \leq P(A) \leq 1 < 5\sqrt{2}$.

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0, 5\sqrt{2})$ άρα

$$\begin{aligned} f[P(A - B)] \leq f[P(A)] &\Leftrightarrow P(A - B) \sqrt{100 - P^2(A - B)} \leq P(A) \sqrt{100 - P^2(A)} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 0 < \frac{P(A - B)}{\sqrt{100 - P^2(A)}} &\leq \frac{P(A)}{\sqrt{100 - P^2(A - B)}} \quad (1). \end{aligned}$$

Είναι $0 < P(A-B) \leq 1$, άρα

$$P^2(A-B) \leq 1 \Leftrightarrow$$

$$-P^2(A-B) \geq -1 \Leftrightarrow 100 - P^2(A-B) \geq 99 \Leftrightarrow \sqrt{100 - P^2(A-B)} \geq \sqrt{99} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0 < \frac{1}{\sqrt{100 - P^2(A-B)}} \leq \frac{1}{\sqrt{99}}$$

Επειδή $0 < P(A) \leq 1$ και

$$0 < \frac{1}{\sqrt{100 - P^2(A-B)}} \leq \frac{1}{\sqrt{99}}, \text{ προκύπτει } 0 < \frac{P(A)}{\sqrt{100 - P^2(A-B)}} \leq \frac{1}{\sqrt{99}} < 1.$$

$$\text{Τελικά } 0 < \frac{P(A-B)}{\sqrt{100 - P^2(A)}} \leq \frac{P(A)}{\sqrt{100 - P^2(A-B)}} < 1.$$

Όμως η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0, 5\sqrt{2})$ άρα

$$f\left(\frac{P(A-B)}{\sqrt{100 - P^2(A)}}\right) \leq f\left(\frac{P(A)}{\sqrt{100 - P^2(A-B)}}\right).$$