

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΑΛΓΕΒΡΑ)

ΕΠΑ.Λ.

2017

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο \mathbb{R} , να αποδείξετε ότι:

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$$

Μονάδες 10

A2. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή ή τη λέξη **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Το ραβδόγραμμα χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση μιας ποσοτικής μεταβλητής.

(Μον. 2)

β) Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A λέγεται συνεχής, αν για κάθε $x_0 \in A$ ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

(Μον. 2)

γ) Το εύρος (\mathbb{R}) είναι ένα μέτρο διασποράς.

(Μον. 2)

Μονάδες 6

A3. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τις παρακάτω ισότητες και να τις συμπληρώσετε:

α) $(x^p)' = \dots$, όπου p ρητός αριθμός.

(Μον. 3)

β) $(\sin x)' = \dots$

(Μον. 3)

γ) Αν x_1, x_2, \dots, x_n είναι οι τιμές μιας ποσοτικής μεταβλητής X ενός δείγματος μεγέθους V και w_1, w_2, \dots, w_n είναι οι αντίστοιχοι συντελεστές στάθμισης (βαρύτητας), τότε ο σταθμικός μέσος βρίσκεται από τον τύπο:

$$\bar{x} = \dots$$

(Μον. 3)

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ Β

Οι βαθμοί ενός φοιτητή σε 10 μαθήματα είναι:

$$4, \kappa, 5, 6, 2\kappa + 1, 4, 6, \kappa + 2, 6, 4$$

όπου:

$$\kappa = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1}$$

B1. Να αποδείξετε ότι $\kappa = 3$.

Μονάδες 7

B2. Για $\kappa = 3$, να υπολογίσετε τη μέση τιμή (\bar{x}) των βαθμών του φοιτητή.

Μονάδες 5

B3. Για $\kappa = 3$, να υπολογίσετε τη διακύμανση (s^2).

Μονάδες 8

B4. Για $\kappa = 3$, να υπολογίσετε τον συντελεστή μεταβολής CV.
Δίνεται ότι $\sqrt{1,4} \cong 1,18$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Οι ηλικίες των εργαζομένων σε μια επιχείρηση ακολουθούν περίπου την κανονική κατανομή. Εάν το 50% των εργαζομένων έχουν ηλικία μεγαλύτερη των 40 ετών και το 16% των εργαζομένων έχουν ηλικία μικρότερη των 35 ετών, να αποδείξετε ότι:

Γ1. Η μέση τιμή των ηλικιών των εργαζομένων είναι $\bar{x} = 40$.

Μονάδες 5

Γ2. Η τυπική απόκλιση είναι $s = 5$.

Μονάδες 10

Εάν οι εργαζόμενοι της επιχείρησης είναι 400, να βρείτε:

Γ3. Πόσοι εργαζόμενοι έχουν ηλικία μεγαλύτερη των 45 ετών.

Μονάδες 5

Γ4. Πόσοι εργαζόμενοι έχουν ηλικία μεγαλύτερη των 30 ετών και μικρότερη των 45 ετών.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 3x + 1$$

Δ1. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

Μονάδες 8

Δ2. Να βρείτε τις θέσεις, το είδος και τις τιμές των τοπικών ακροτάτων της συνάρτησης f .

Μονάδες 6

Δ3. Να βρείτε το σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο οποίο η εφαπτομένη είναι παράλληλη στην ευθεία $y = x + 2017$.

Μονάδες 6

Δ4. Εάν τα σημεία $M_1(x_1, y_1), M_2(x_2, y_2), M_3(x_3, y_3), M_4(x_4, y_4), M_5(x_5, y_5)$ ανήκουν στη γραφική παράσταση της $y = f''(x)$ και η τυπική απόκλιση των τετμημένων x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 των $M_1(x_1, y_1), M_2(x_2, y_2), M_3(x_3, y_3), M_4(x_4, y_4), M_5(x_5, y_5)$ είναι ίση με 3, να βρείτε την τυπική απόκλιση των τεταγμένων y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 των σημείων $M_1(x_1, y_1), M_2(x_2, y_2), M_3(x_3, y_3), M_4(x_4, y_4), M_5(x_5, y_5)$.

Μονάδες 5

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Θεωρία (σελίδα σχ. βιβλίου 31).

A2. α) Λ β) Σ γ) Σ

A3. α) $(x^p)' = p \cdot x^{p-1}$

β) $(\sin x)' = \cos x$

γ) $\bar{x} = \frac{w_1 \cdot x_1 + w_2 \cdot x_2 + \dots + w_v \cdot x_v}{w_1 + w_2 + \dots + w_v}$

ΘΕΜΑ Β

B1. Είναι $\frac{x^2 + x - 2}{x - 1} = \frac{(x - 1)(x + 2)}{x - 1} = x + 2$

Άρα $\kappa = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 2) = 1 + 2 = 3.$

B2. Για $\kappa = 3$ οι βαθμοί του φοιτητή έχουν τις τιμές:
4, 3, 5, 6, 7, 4, 6, 5, 6, 4, οπότε η μέση τιμή είναι:

$$\bar{x} = \frac{4 + 3 + 5 + 6 + 7 + 4 + 6 + 5 + 6 + 4}{10} = \frac{50}{10} = 5$$

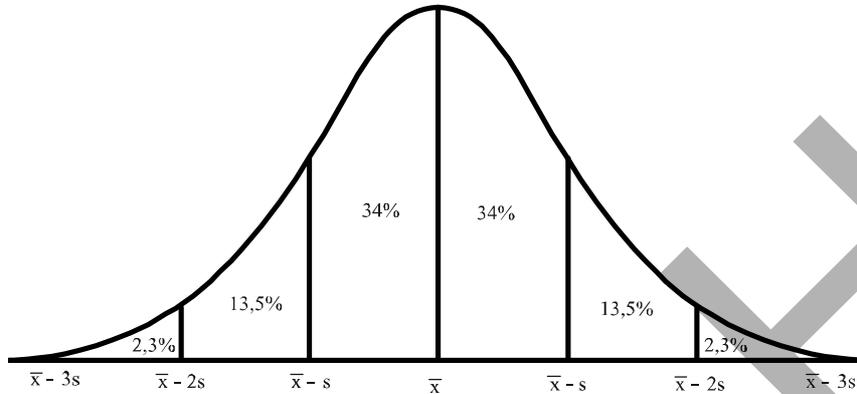
B3.

$$s^2 = \frac{1}{10} \left[(3 - 5)^2 + 3(4 - 5)^2 + 2(5 - 5)^2 + 3(6 - 5)^2 + (7 - 5)^2 \right] =$$

$$\frac{1}{10} [4 + 3 + 3 + 4] = \frac{14}{10} = 1,4.$$

B4. $CV = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{\sqrt{1,4}}{5} = \frac{1,18}{5} = 0,236.$

ΘΕΜΑ Γ



Γ1. Επειδή το 50% των εργαζομένων αντιστοιχεί στη μέση τιμή \bar{x} προκύπτει ότι $\bar{x} = 40$.

Γ2. Σύμφωνα με το παραπάνω διάγραμμα, είναι: $\bar{x} - s = 35$
και επειδή $\bar{x} = 40$
έχουμε $40 - s = 35 \Leftrightarrow s = 5$.

Γ3. Σύμφωνα με το παραπάνω διάγραμμα οι εργαζόμενοι που έχουν ηλικία μεγαλύτερη των 45 ετών αντιστοιχούν σε ποσοστό 16% του πλήθους των εργαζομένων οπότε θα είναι

$$\frac{16 \cdot 400}{100} = 64 \text{ εργαζόμενοι}$$

Γ4. Σύμφωνα με το παραπάνω διάγραμμα οι εργαζόμενοι που έχουν ηλικία μεγαλύτερη των 30 και μικρότερη των 45 ετών, αντιστοιχεί σε ποσοστό 81,5%, οπότε θα είναι:

$$\frac{81,5 \cdot 400}{100} = 326 \text{ εργαζόμενοι}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Είναι $f'(x) = -\frac{1}{3}(x^3)' + 2(x^2)' - 3(x)' + (1)' =$
 $= -\frac{1}{3} \cdot 3x^2 + 2 \cdot 2x - 3 = -x^2 + 4x - 3$
 $= -(x^2 - 4x + 3) = -(x-1)(x-3).$

Προκύπτει έτσι ο επόμενος πίνακας μεταβολής:

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$
f'	-	\ominus	\oplus	-
f	\searrow	τ.ελ.	\nearrow	τ.μεγ. \searrow

Δηλαδή η f είναι γνησίως φθίνουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 1]$ και $[3, +\infty)$, ενώ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[1, 3]$.

Δ2. Η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στη θέση $x = 1$ με τιμή $f(1) = -\frac{1}{3}$.
Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στη θέση $x = 3$ με τιμή $f(3) = 1$.

Δ3. Το σημείο στο οποίο η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης είναι παράλληλη με την ευθεία $y = x + 2017$ προκύπτει από τη λύση της εξίσωσης

$$\begin{aligned} f'(x) = 1 &\Leftrightarrow -x^2 + 4x - 3 = 1 \Leftrightarrow -x^2 + 4x - 4 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -(x^2 - 4x + 4) = 0 \Leftrightarrow -(x - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = 2. \end{aligned}$$

Δ4. Για τη δεύτερη παράγωγο της f είναι

$$f''(x) = (-x^2 + 4x - 3)' = (-x^2)' + (4x)' + (3)' = -2x + 4.$$

Μεταξύ των τεταγμένων x και των τεταγμένων y υφίσταται η σχέση $y = f''(x) \Leftrightarrow y = -2x + 4$.

Έτσι για τις αντίστοιχες τυπικές αποκλίσεις ισχύει

$$s_y = |-2|s_x \Leftrightarrow s_y = 2 \cdot 3 \Leftrightarrow s_y = 6.$$