<u>ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ</u>

ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

2017

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ. Αν $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ.

Μονάδες 7

Α2. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Κάθε συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής στο x_0, είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.»

α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ αν είναι ψευδής. (μονάδα 1)

β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **α**. (μονάδες 3)

Μονάδες 4

Α3. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$;

Μονάδες 4

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό** αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Για κάθε ζεύγος συναρτήσεων $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$ και $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = +\infty$, τότε $\lim\limits_{x \to x_0} \left[f(x) \cdot g(x) \right] = 0$.

β) Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με πεδία ορισμού Α, Β αντίστοιχα, τότε η $g \circ f$ ορίζεται αν $f(\mathrm{A}) \cap \mathrm{B} \neq \varnothing$.

γ) Για κάθε συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που είναι παραγωγίσιμη και δεν παρουσιάζει ακρότατα, ισχύει $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

δ) Αν $0 < \alpha < 1$, τότε $\lim\limits_{x \to -\infty} \alpha^x = +\infty$.

ε) Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f είναι διάστημα.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln x,\ x > 0$ και $g(x) = \dfrac{x}{1-x},\ x \neq 1$.

Β1. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $f \circ g$.

Μονάδες 5

Β2. Αν $h(x) = (f \circ g)(x) = \ln\left(\dfrac{x}{1-x}\right),\ x \in (0,1)$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση h αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της.

Μονάδες 6

Β3. Αν $\varphi(x) = h^{-1}(x) = \dfrac{e^x}{e^x + 1},\ x \in \mathbb{R}$, να μελετήσετε τη συνάρτηση φ ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα , την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

Μονάδες 7

Β4. Να βρείτε τις οριζόντιες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης φ και να τη σχεδιάσετε. (Η γραφική παράσταση να σχεδιαστεί με στυλό.)

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -\eta\mu x,\ x \in [0, \pi]$ και το σημείο $A\left(\dfrac{\pi}{2}, -\dfrac{\pi}{2}\right)$

Γ1. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν ακριβώς δύο εφαπτόμενες (ε_1), (ε_2) της γραφικής παράστασης της f που άγονται από το A, τις οποίες και να βρείτε.

Μονάδες 8

Γ2. Αν (ε_1): $y = -x$ και (ε_2): $y = x - \pi$ είναι οι ευθείες του ερωτήματος **Γ1**, τότε να σχεδιάσετε τις (ε_1), (ε_2) και τη γραφική παράσταση της f, και να αποδείξετε ότι $\dfrac{E_1}{E_2} = \dfrac{\pi^2}{8} - 1$, όπου:

- E_1 είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f και τις ευθείες (ε_1), (ε_2) και
- E_2 είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f και τον άξονα $x'x$.

Μονάδες 6

Γ3. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{f(x) + x}{f(x) - x + \pi}$.

Μονάδες 4

Γ4. Να αποδείξετε ότι $\displaystyle\int_1^e \frac{f(x)}{x}\,dx > e - 1 - \pi$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\sqrt[3]{x^4}, & x\in[-1,0)\\ e^x ημx, & x\in[0,\pi]\end{cases}$

Δ1. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[-1, \pi]$ και να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της.

Μονάδες 5

Δ2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Μονάδες 6

Δ3. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, τη γραφική παράσταση της g, με $g(x) = e^{5x}$, $x \in \mathbb{R}$, τον άξονα $y'y$ και την ευθεία $x = \pi$.

Μονάδες 6

Δ4. Να λύσετε την εξίσωση $16e^{-\frac{3\pi}{4}} f(x) - e^{-\frac{3\pi}{4}}\left(4x-3\pi\right)^2 = 8\sqrt{2}$.

Μονάδες 8

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία, Σελ. 135 σχολικού βιβλίου.

Α2. **α.** Ψ

β. Η συνάρτηση $f(x)=|x|$, είναι συνεχής στο $x_0=0$, διότι $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$.

Όμως $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{x}=1$, ενώ

$\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{-x}{x}=-1$.

Άρα η f ενώ είναι συνεχής στο $x_0=0$, δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$.

Α3. Μία συνάρτηση είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα [α, β], όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (α, β) και επιπλέον

$$\lim_{x\to a^+} f(x)=f(a) \text{ και } \lim_{x\to \beta^-} f(x)=f(\beta).$$

Α4. **α)** Λ **β)** Σ **γ)** Λ **δ)** Σ **ε)** Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Είναι

$$f(x)=\ln x,\quad x\in(0,+\infty)=A_f$$

$$g(x)=\frac{x}{1-x},\quad x\in(-\infty,1)\cup(1,+\infty)=A_g$$

Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης *fog* είναι:

$$A_{fog}=\left\{x\in A_g,\ \text{ώστε } g(x)\in A_f\right\}=\left\{x\in(\infty,1)\cup(1,+\infty),\ \text{ώστε } \frac{x}{1-x}\in(0,+\infty)\right\}=$$

$$=\left\{x\in(-\infty,1)\cup(1,+\infty),\ \text{ώστε } x(1-x)>0\right\}=\left\{x\in(-\infty,1)\cup(1,+\infty),\ \text{ώστε } x\in(0,1)\right\}=(0,1).$$

Ο τύπος της συνάρτησης *fog* είναι:

$$(fog)(x)=f\big(g(x)\big)=\ln\left(\frac{x}{1-x}\right),\ x\in(0,\,1).$$

B2.

α) Για να δείξουμε ότι η συνάρτηση h αντιστρέφεται αρκεί να δείξουμε ότι είναι 1–1. Ισοδύναμα:

Αν $h(x_1)=h(x_2)$ με $x_1, x_2 \in (0,1)$ να δείξουμε ότι $x_1 = x_2$.

Πράγματι:

Αν $h(x_1)=h(x_2) \Leftrightarrow \ln\left(\dfrac{x_1}{1-x_1}\right)=\ln\left(\dfrac{x_2}{1-x_2}\right)$

Όμως η $f(x)=\ln x$ είναι 1-1, άρα προκύπτει

$\dfrac{x_1}{1-x_1}=\dfrac{x_2}{1-x_2}$, άρα $x_1\left(1-x_2\right)=x_2\left(1-x_1\right)$, ή

$x_1 - x_1x_2 = x_2 - x_1x_2$, ή $x_1 = x_2$.

β) Έστω $y=h(x) \Leftrightarrow x=h^{-1}(y)$, $x \in (0,\ 1)$. Διαδοχικά έχουμε:

$$y=h(x) \Leftrightarrow y=\ln\left(\frac{x}{1-x}\right) \Leftrightarrow \frac{x}{1-x}=e^y \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\left(1-x\right)e^y \Leftrightarrow x=e^y-xe^y \Leftrightarrow x+xe^y = e^y \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x\left(1+e^y\right)=e^y \Leftrightarrow x=\frac{e^y}{1+e^y}, \quad y\in\mathbb{R}.$$

Όμως $x\in\left(0,1\right) \Leftrightarrow \dfrac{e^y}{1+e^y}\in\left(0,1\right) \Leftrightarrow 0<\dfrac{e^y}{e^y+1}<1 \Leftrightarrow y\in\mathbb{R}.$

Έτσι $h^{-1}\left(y\right)=\dfrac{e^y}{1+e^y}, \quad y\in\mathbb{R}, \quad$ ή $\quad h^{-1}\left(x\right)=\dfrac{e^x}{1+e^x}, \quad x\in\mathbb{R}.$

B3 Είναι $\varphi'(x)=\left(\dfrac{e^x}{e^x+1}\right)'=\dfrac{(e^x)'(e^x+1)-e^x(e^x+1)'}{(e^x+1)^2}=$

$$=\frac{e^x(e^x+1)-e^x\cdot e^x}{(e^x+1)^2}=\frac{e^x}{(e^x+1)^2}>0$$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το $\mathbb{R}$ και δεν έχει ακρότατα.

Είναι $\varphi''(x)=\left(\dfrac{e^x}{(e^x+1)^2}\right)'=\dfrac{(e^x)'\cdot(e^x+1)^2-e^x\left[(e^x+1)^2\right]'}{(e^x+1)^4}=$

$$=\frac{e^x(e^x+1)^2-e^x\left[2(e^x+1)\right]\cdot(e^x+1)'}{(e^x+1)^4}=$$

$$=\frac{e^x(e^x+1)^2-e^x\cdot 2(e^x+1)\cdot e^x}{(e^x+1)^4}=$$

$$=\frac{e^x(e^x+1)\cdot\left[e^x+1-2\cdot e^x\right]}{(e^x+1)^4}=\frac{e^x\cdot(1-e^x)}{(e^x+1)^3}=-\frac{e^x\cdot(e^x-1)}{(e^x+1)^3}.$$

Είναι $\dfrac{e^x}{(1+e^x)^3} > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Έτσι $\varphi''(x) = 0 \Leftrightarrow e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow e^x = e^0 \Leftrightarrow x = 0$

$\varphi''(x) > 0 \Leftrightarrow -(e^x - 1) > 0 \Leftrightarrow e^x - 1 < 0 \Leftrightarrow e^x < e^0 \Leftrightarrow x < 0$

$\varphi''(x) < 0 \Leftrightarrow -(e^x - 1) < 0 \Leftrightarrow e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow e^x > e^0 \Leftrightarrow x > 0$.

Η φ στρέφει τα κοίλα άνω στο διάστημα $(-\infty, 0]$, στρέφει τα κοίλα κάτω στο διάστημα $[0, +\infty)$, ενώ παρουσιάζει σημείο καμπής στο σημείο $x_0 = 0$.

Β4 Οι οριζόντιες ασύμπτωτες της φ, αν υπάρχουν, προκύπτουν από τα:
α) $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x)$, β) $\lim\limits_{x\to-\infty} \varphi(x)$

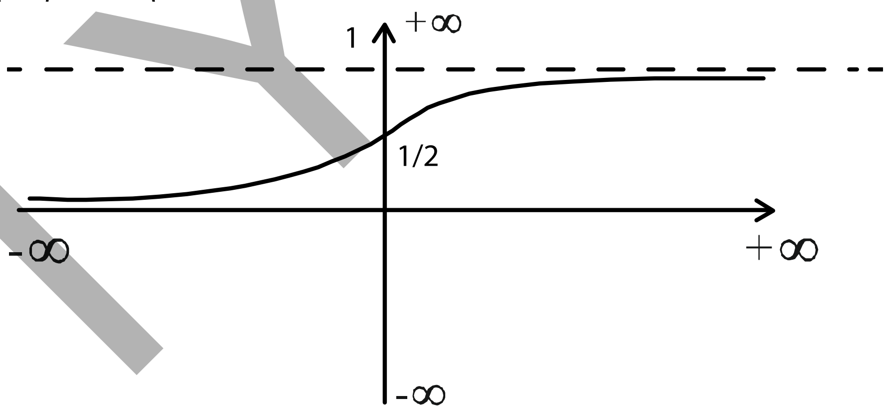
α) $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{e^x+1} \overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(e^x)'}{(e^x+1)'} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{e^x} = 1$

Άρα η ευθεία $y = 1$ είναι οριζόντια της φ στο $+\infty$.

β) $\lim\limits_{x\to-\infty} \varphi(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^x}{e^x+1} = \dfrac{\lim\limits_{x\to-\infty} e^x}{\lim\limits_{x\to-\infty} (e^x+1)} = \dfrac{0}{0+1} = 0$.

Άρα η ευθεία $y = 0$ (άξονα $x'x$) είναι οριζόντια ασύμπτωτη της φ στο $-\infty$.

Γραφική παράσταση:



ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Είναι $f'(x) = -\text{συν}x$, $x \in [0, \pi]$

Έστω $\text{Μ}(x_0, y_0)$ σημείο επαφής με $x_0 \in [0, \pi]$, τότε η εφαπτομένη στο Μ είναι:

(ε): $y - f'(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$

$\text{Α} \in (\varepsilon)$: $y_{\text{Α}} - f(x_0) = f'(x_0)(x_{\text{Α}} - x_0)$

$$-\frac{\pi}{2} + \text{ημ}x_0 = -\text{συν}x_0\left(\frac{\pi}{2} - x_0\right)$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} + \text{ημ}x_0 = -\frac{\pi}{2}\text{συν}x_0 + x_0\text{συν}x_0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} + \text{ημ}x_0 + \frac{\pi}{2}\text{συν}x_0 - x_0\text{συν}x_0 = 0 \qquad (1).$$

Θα έχουμε τόσες εφαπτόμενες ευθείες, όσες λύσεις αντίστοιχα της (1) ως προς x_0.

Θεωρούμε τη συνάρτηση Κ, με

$$\text{Κ}(x) = -\frac{\pi}{2} + \text{ημ}x + \frac{\pi}{2}\text{συν}x - x\text{συν}x,\ \ x \in [0, \pi]$$

$$\text{Κ}'(x) = \text{συν}x - \frac{\pi}{2}\text{ημ}x - (\text{συν}x - x\text{ημ}x)$$

$$= x\text{ημ}x - \frac{\pi}{2}\text{ημ}x = \text{ημ}x\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\text{Κ}'(x) = \text{ημ}x\left(x - \frac{\pi}{2}\right),\ \ x \in [0, \pi]$$

Επειδή $\text{ημ}x > 0$ για $x \in (0, \pi)$, ενώ $x - \frac{\pi}{2} < 0$ για $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

$x - \frac{\pi}{2} > 0$ για $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$,

προκύπτει ο εξής πίνακας μεταβολών για την Κ:

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
Κ′(x)		-	0	+	
Κ(x)	0	↘	min	↗	0

με $\text{Κ}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 - \frac{\pi}{2} < 0$.

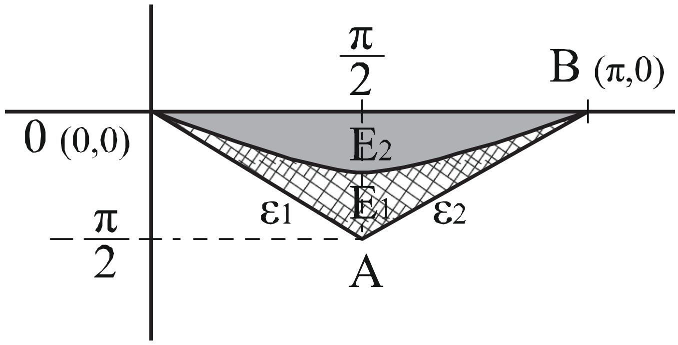
Προκύπτει ότι η $\text{Κ}(x)$ έχει σύνολο τιμών το διάστημα $\left[1 - \frac{\pi}{2}, 0\right]$, ενώ μηδενίζεται μόνο στα σημεία $x_1 = 0$, $x_2 = \pi$.

Δηλαδή υπάρχουν δύο ακριβώς εφαπτόμενες που άγονται από το Α:

Για $x_1 = 0$: $y + \text{ημ}0 = -\text{συν}0(x - 0) \Leftrightarrow y = -x \quad (\varepsilon_1)$

Για $x_2 = \pi$: $y + \text{ημ}\pi = -\text{συν}\pi(x - \pi) \Leftrightarrow y = x - \pi \quad (\varepsilon_2)$

Γ2



Επειδή $f(x) \le 0$ για $x \in [0, \pi]$ είναι

$$\mathrm{E}_2 = -\int_0^{\pi} f(x)dx = -\int_0^{\pi} -\eta\mu x dx = \int_0^{\pi} \eta\mu x dx =$$

$$= [-\sigma\upsilon\nu x]_0^{\pi} = -[\sigma\upsilon\nu x]_0^{\pi} = -(\sigma\upsilon\nu\pi - \sigma\upsilon\nu 0) =$$

$$= -(-1-1) = 2 \text{ τ.μ.}$$

Το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ ισούται με $\frac{1}{2}\pi \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2}{4}$

$$\mathrm{E}_1 = (\mathrm{O}\hat{\mathrm{A}}\mathrm{B}) - \mathrm{E}_2 = \frac{\pi^2}{4} - 2 \quad \text{τ.μ.}$$

Άρα $\frac{\mathrm{E}_1}{\mathrm{E}_2} = \frac{\frac{\pi^2}{4} - 2}{2} = \frac{\pi^2}{8} - 4.$

Γ3. Είναι

$$\lim_{x\to\pi}(f(x) + x) = -\eta\mu\pi + \pi = \pi > 0$$

$$\lim_{x\to\pi}(f(x) - x + \pi) = 0$$

f κυρτή στο διάστημα $[0,\pi] \Rightarrow f(x) > x - \pi$, για $x \in (0,\pi)$

$$\Rightarrow f(x) - x + \pi > 0 \text{ για } x \in (0,\pi)$$

Άρα,

$$\lim_{x\to\pi} \frac{f(x)+x}{f(x)-x+\pi} = \lim_{x\to\pi^-} \frac{f(x)+x}{f(x)-x+\pi} = +\infty$$

Γ4. Από το σχήμα του ερωτήματος Γ2 προκύπτει ότι αφού η f είναι κυρτή στο $[1, e] \subset [0, \pi]$, θα είναι "πάνω" από κάθε εφαπτομένη της. Άρα, $f(x) > x - \pi$ για κάθε $x \in [1, e] \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x} > 1 - \frac{\pi}{x}, \qquad x \in [1,e]$

Άρα $\int_1^e \frac{f(x)}{x}dx > \int_1^e \left(1 - \frac{\pi}{x}\right)dx \Rightarrow \int_1^e \frac{f(x)}{x}dx > e - 1 - \pi[\ln x]_1^e \Rightarrow$

$$\Rightarrow \int_1^e \frac{f(x)}{x}dx > e - 1 - \pi(\ln e - \ln 1) \Rightarrow \int_1^e \frac{f(x)}{x}dx > e - 1 - \pi$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. **α)** Στο διάστημα $[-1, 0)$ η f είναι συνεχής ως σύνθεση συνεχών.

β) Στο διάστημα $(0, \pi]$ η f είναι επίσης συνεχής ως γινόμενο συνεχών.

γ) Εξετάζουμε τη συνέχεια στο $x = 0$

Είναι $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} \sqrt[3]{x^4} = 0$

και $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \left(e^x \eta\mu x\right) = 0 = f(0)$.

Άρα η f είναι συνεχής στο $x = 0$, επομένως συνεχής και στο $[-1, \pi]$.

Κρίσιμα σημεία της f (εσωτερικά σημεία του πεδίου ορισμού όπου η f' δεν υπάρχει, είτε μηδενίζεται).

Για $-1 \le x < 0$: $f(x) = \sqrt[3]{x^4} = \sqrt[3]{(-x)^4} = (-x)^{\frac{4}{3}} \Rightarrow f'(x) = -\dfrac{4}{3}(-x)^{\frac{1}{3}} < 0$

Για $0 < x \le \pi$: $f(x) = e^x \eta\mu x \Rightarrow f'(x) = e^x\left(\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x\right)$

Εξετάζουμε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x = 0$.

Είναι

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{\sqrt[3]{x^4}}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{\sqrt[3]{|x|^4}}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{|x|\sqrt[3]{|x|}}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-x\sqrt[3]{-x}}{x} = 0$$

και $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{e^x \eta\mu x}{x} = \lim\limits_{x \to 0^+} \left(e^x \dfrac{\eta\mu x}{x}\right) = 1 \cdot 1 = 1$

Άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο $x = 0$, άρα το σημείο $x = 0$ είναι κρίσιμο σημείο.

Είναι $f'(x) = \begin{cases} -\dfrac{4}{3}(-x)^{\frac{1}{3}}, & -1 < x < 0 \\ e^x\left(\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x\right), & 0 < x < \pi \end{cases}$

Είναι προφανώς $f'(x) < 0$ στο $(-1, 0)$.

Για $0 < x < \pi$ είναι $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x = 0 \overset{\sigma\upsilon\nu x \neq 0}{\Leftrightarrow} \varepsilon\varphi x = -1 \Leftrightarrow x = \dfrac{3\pi}{4}$ αφού $x \in (0, \pi)$. (Σημ. είναι $\sigma\upsilon\nu x \neq 0$, διότι αν $\sigma\upsilon\nu x = 0$ θα πρόκυπτε και $\eta\mu x = 0$, αδύνατον, λόγω της βασικής τριγωνομετρικής ταυτότητας $\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1$).

Άρα κρίσιμα σημεία τα $x = 0$, $x = \dfrac{3\pi}{4}$.

Δ2 Η συνάρτηση $\varphi(x) = \eta\mu\, x + \sigma\upsilon\nu\, x$ αφού είναι συνεχής και μηδενίζεται μόνο στο $x = \dfrac{3\pi}{4}$ άρα σε καθένα από τα διαστήματα $\left(0, \dfrac{3\pi}{4}\right)$ και $\left(\dfrac{3\pi}{4}, \pi\right)$ θα διατηρεί σταθερό πρόσημο.

Έτσι, για $x = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow \varphi\left(\dfrac{\pi}{2}\right) > 0 \Rightarrow \varphi(x) > 0$ στο $\left(0, \dfrac{3\pi}{4}\right)$

και για $x=\frac{5\pi}{6} \Rightarrow \varphi\left(\frac{5\pi}{6}\right)<0 \Rightarrow \varphi(x)<0$ στο $\left(\frac{3\pi}{4},\pi\right)$.

Άρα, το πρόσημο της f' και οι μεταβολές της φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	-1		0		$\frac{3\pi}{4}$		π
f'		$-$		$+$	0	$-$	
f		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	
	Τ.Μ.		Τ.Ε.		Τ.Μ.		Τ.Ε.

Έτσι, η f είναι γν. αύξουσα στο $\left[0,\frac{3\pi}{4}\right]$ και γνησίως φθίνουσα στο $(-1,0]$, $\left[\frac{3\pi}{4},\pi\right]$.

Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στα σημεία $x=-1$ και $x=\frac{3\pi}{4}$ και τοπικό ελάχιστο στα $x=0$ και $x=\pi$.

Είναι $f(-1)=1, f(0)=0,\ f\left(\frac{3\pi}{4}\right)=e^{\frac{3\pi}{4}}\frac{\sqrt{2}}{2}, f(\pi)=0$.

Επειδή η f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[-1,\pi]$, το σύνολο τιμών της θα είναι το $[f_{\min}, f_{\max}]$, όπου

$f_{\min}$ = ολικό ελάχιστο = $\min(f(0), f(\pi))=0$

$f_{\max}$ = ολικό μέγιστο = $\max\left(f(-1),\ f\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)=\max\left(1,\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3\pi}{4}}\right)$.

Όμως $\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3\pi}{4}}>1 \Leftrightarrow e^{\frac{3\pi}{4}}>\sqrt{2} \Leftrightarrow e^{\frac{3\pi}{2}}>2$. Επειδή $\frac{3\pi}{2}>1 \overset{e^x\uparrow}{\Rightarrow} e^{\frac{3\pi}{2}}>e^1>2$.

Άρα $f_{\max}=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3\pi}{4}}$, όποτε το σύνολο τιμών της f είναι το $\left[0,\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3\pi}{4}}\right]$.

Δ3. Στο $[0,\pi]$ είναι $g(x)-f(x)=e^{5x}-e^{x}\eta\mu x=e^{x}\left(e^{4x}-\eta\mu x\right)$.

Όμως, για $x\in[0,\pi]$ είναι

$$\left.\begin{array}{l} e^{4x}\geq 1 \quad \text{(η ισότητα ισχύει μόνον για } x=0) \\ \text{και } \eta\mu x\leq 1 \quad \left(\text{η ισότητα ισχύει μόνον για } x=\frac{\pi}{2}\right) \end{array}\right\}\Rightarrow$$

$\Rightarrow e^{4x}-\eta\mu x>0 \Rightarrow g(x)-f(x)>0$.

Άρα,

$$\mathrm{E}=\int_0^{\pi}\left(g(x)-f(x)\right)dx=\int_0^{\pi}\left(e^{5x}-e^{x}\eta\mu x\right)dx=$$

$$=\int_0^{\pi}e^{5x}dx-\int_0^{\pi}e^{x}\eta\mu x dx=$$

$$=\left[\frac{e^{5x}}{5}\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}e^{x}\eta\mu x dx=\frac{e^{5\pi}-1}{5}-\int_0^{\pi}e^{x}\eta\mu x dx.$$

Είναι

$$\mathrm{I}=\int_0^{\pi} e^x ημx\,dx=\int_0^{\pi}\left(e^x\right)' ημx\,dx=\left[e^x ημx\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi} e^x συνx\,dx=$$

$$=-\int_0^{\pi}\left(e^x\right)' συνx\,dx=-\left[e^x συνx\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi} e^x ημx\,dx=e^{\pi}+1-\mathrm{I}$$

Άρα, ισχύει $2\mathrm{I}=e^{\pi}+1 \Leftrightarrow \mathrm{I}=\dfrac{e^{\pi}+1}{2}$

Άρα, $\mathrm{E}=\dfrac{e^{5\pi}-1}{5}-\dfrac{e^{\pi}+1}{2}$.

Δ4. **<u>Α΄ Τρόπος</u>**

Η δοσμένη εξίσωση γράφεται διαδοχικά

$$16f(x)-\left(4x-3\pi\right)^2=8\sqrt{2}\cdot e^{\frac{3\pi}{4}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 16f(x)-16\left(x-\frac{3\pi}{4}\right)^2=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot e^{\frac{3\pi}{4}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x)-\left(x-\frac{3\pi}{4}\right)^2=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot e^{\frac{3\pi}{4}} \qquad (1)$$

- Η $x=\dfrac{3\pi}{4}$ προφανής ρίζα της εξίσωσης.
- Για $x\neq\dfrac{3\pi}{4}$, επειδή το σύνολο τιμών της f είναι το $\left[0,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot e^{\frac{3\pi}{4}}\right]$ έχουμε:

$$f\left(x\right)\leq\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot e^{\frac{3\pi}{4}} \Rightarrow f\left(x\right)-\left(x-\frac{3\pi}{4}\right)^2\leq\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3\pi}{4}}-\left(x-\frac{3\pi}{4}\right)^2 \qquad (2)$$

Όμως, $\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3\pi}{4}}-\left(x-\dfrac{3\pi}{4}\right)^2<\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3\pi}{4}}$ αφού $x\neq\dfrac{3\pi}{4}$ $\qquad (3)$

Από (2), (3) $\Rightarrow f\left(x\right)-\left(x-\dfrac{3\pi}{4}\right)^2<\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot e^{\frac{3\pi}{4}}$

Άρα η (1) είναι αδύνατη. Επομένως, μοναδική ρίζα είναι η $x=\dfrac{3\pi}{4}$.

<u>Β΄ Τρόπος</u>

Η δοσμένη εξίσωση γράφεται διαδοχικά

$$16f(x)-(4x-3\pi)^2=8\sqrt{2}\cdot e^{\frac{3\pi}{4}} \Leftrightarrow$$

$$16f(x)-16\left(x-\frac{3\pi}{4}\right)^2=8\sqrt{2}\cdot e^{\frac{3\pi}{4}} \Leftrightarrow$$

$$f(x)-\left(x-\frac{3\pi}{4}\right)^2=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot e^{\frac{3\pi}{4}}$$

Όμως, το $\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot e^{\frac{3\pi}{4}} = f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = f_{\max}$ στο διάστημα $[0, \pi]$

Άρα, $f_{\max} = f(x) - \left(x - \frac{3\pi}{4}\right)^2$

Και επειδή $f_{\max} \geq f(x)$ για $x \in [0, \pi]$ είναι

$$f(x) - \left(x - \frac{3\pi}{4}\right)^2 \geq f(x), \qquad x \in [0, \pi]$$

Άρα, $\left(x - \frac{3\pi}{4}\right)^2 \leq 0 \Leftrightarrow x - \frac{3\pi}{4} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{4}$.