<u>ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ</u>

ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

2019

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$.

α) Τι ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το *Α*;

(Μονάδες 2)

β) **i.** Πότε μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ έχει αντίστροφη;

(Μονάδα 1)

ii. Αν ισχύουν οι προϋποθέσεις του **(i)**, πώς ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση της *f*;

(Μονάδες 3)

Μονάδες 6

Α2. Να διατυπώσετε το θεώρημα του Fermat που αφορά τα τοπικά ακρότατα μιας συνάρτησης.

Μονάδες 4

Α3. Έστω μια συνάρτηση *f*, η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα *Δ*. Αν $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του *Δ*, να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το *Δ*.

Μονάδες 5

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση και δίπλα στο γράμμα τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη. **Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας**.

α) Για κάθε συνάρτηση *f*, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $A = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ με $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in A$, ισχύει ότι η f είναι σταθερή στο *Α*.

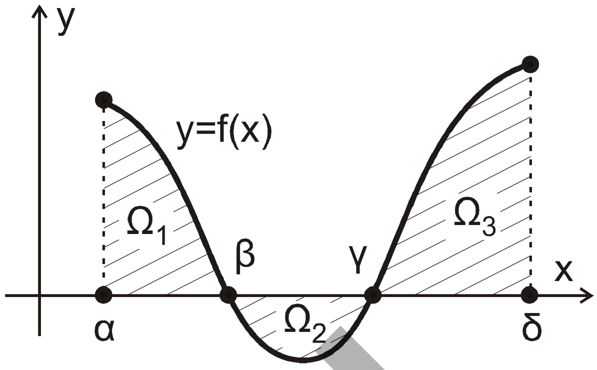
(Μονάδα 1 για το ν χαρακτηρισμό Σωστό/Λάθος
Μονάδες 3 για την αιτιολόγηση)

β) Για κάθε συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$, όταν υπάρχει το όριο της f καθώς το x τείνει στο $x_0 \in A$, τότε αυτό το όριο ισούται με την τιμή της f στο x_0.

(Μονάδα 1 για το ν χαρακτηρισμό Σωστό/Λάθος
Μονάδες 3 για την αιτιολόγηση)

Μονάδες 8

Α5. Έστω η συνάρτηση f του διπλανού σχήματος.
Αν για τα εμβαδά των χωρίων Ω_1, Ω_2 και Ω_3 ισχύει ότι $E(\Omega_1) = 2$, $E(\Omega_2) = 1$ και $E(\Omega_3) = 3$, τότε το $\int_{\alpha}^{\delta} f(x)\,dx$ είναι ίσο με:



α) 6 **β)** – 4 **γ)** 4 **δ)** 0 **ε)** 2

Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=e^{-x}+\lambda$, όπου $\lambda\in\mathbb{R}$, η οποία έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία $y = 2$.

Β1. Να αποδείξετε ότι $\lambda = 2$.

Μονάδες 3

Β2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)-x=0$ έχει μοναδική ρίζα, η οποία βρίσκεται στο διάστημα (2, 3).

Μονάδες 7

Β3. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι 1-1 (μονάδες 2) και στη συνέχεια να βρείτε την αντίστροφή της (μονάδες 4).

Μονάδες 6

Β4. Έστω $f^{-1}(x)=-\ln(x-2)$, $x > 2$. Να βρείτε την κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής της παράστασης (μονάδες 3) και στη συνέχεια να κάνετε μια πρόχειρη γραφική παράσταση των συναρτήσεων f και f^{-1} στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων (μονάδες 6).

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x^2+\alpha, & x\ge 1 \\ e^{x-1}+\beta x, & x<1. \end{cases}$

Γ1. Να αποδείξετε ότι $\alpha = 1$ και $\beta = 1$.

Μονάδες 5

Γ2. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Μονάδες 4

Γ3. **i.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα x_0, η οποία είναι αρνητική.

(Μονάδες 4)

ii. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f^2(x)-x_0 f(x)=0$ είναι αδύνατη στο $\left(x_0,+\infty\right)$.

(Μονάδες 4)

Μονάδες 8

Γ4. Ένα σημείο $M(x, y)$ κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y=f(x),\ \ x\geq 1$.
Τη χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία το σημείο M διέρχεται από το σημείο $A(3, 10)$, ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του σημείου M είναι 2 μονάδες ανά δευτερόλεπτο. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου $M\overset{\triangle}{\mathrm{O}}K$ τη χρονική στιγμή t_0, όπου $K(x, 0)$ και $O(0, 0)$.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=\left(x-1\right)\ln\left(x^2-2x+2\right)+\alpha x+\beta$ όπου $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ και η ευθεία $(\varepsilon): y=-x+2$, η οποία εφάπτεται στη γραφική παράσταση της f στο σημείο της $A(1, 1)$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι $\alpha=-1$ και $\beta=2$.

Μονάδες 4

Δ2. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, την ευθεία (ε) και τις ευθείες $x=1$ και $x=2$.

Μονάδες 5

Δ3. **i.** Να αποδείξετε ότι $f'(x)\geq -1$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

(Μονάδες 3)

ii. Να αποδείξετε ότι $f\left(\lambda+\dfrac{1}{2}\right)+\lambda\geq\left(\lambda-1\right)\ln\left(\lambda^2-2\lambda+2\right)+\dfrac{3}{2}$, για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$.

(Μονάδες 5)

Μονάδες 8

Δ4. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f και η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=-x^3-x+2$, $x\in\mathbb{R}$ έχουν μοναδική κοινή εφαπτομένη και να βρείτε την εξίσωσή της.

Μονάδες 8

<u>ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ</u>

ΘΕΜΑ Α

Α1. **α**. Ορισμός, σελίδα σχολικού βιβλίου 15.

β. **i.** Η συνάρτηση έχει αντίστροφη όταν είναι 1–1 στο Α.

ii. Είναι η συνάρτηση $g: f(A) \to \mathbb{R}$ με την οποία για κάθε $y \in f(A)$ αντιστοιχίζεται μοναδικό $x \in A$ για το οποίο ισχύει $f(x) = y$. Η συνάρτηση αυτή g συμβολίζεται f^{-1}.

Α2. Θεώρημα Fermat, σελίδα σχολ. βιβλίου 142.

Α3. Θεώρημα, σελίδα σχολ. βιβλίου 135.

Α4. **α**. Λάθος

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$

Παρατηρούμε ότι, αν και $f'(x) = 0$, για κάθε $x \in (-\infty, 0) \cup \left(0, +\infty\right)$, εντούτοις η f δεν είναι σταθερή στο $(-\infty, 0) \cup \left(0, +\infty\right)$.

Α4. **β)** Λάθος. Έστω η $f(x) = \begin{cases} x, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$

Είναι $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} x = 0 \neq f(0) = 1$

Α5. **γ.**

ΘΕΜΑ Β

Β1. Ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{-x}+\lambda\right)=2 \Leftrightarrow 0+\lambda=2 \Leftrightarrow \lambda=2.$

Β2. Έστω συνάρτηση g με $g(x)=f(x)-x=e^{-x}-x+2,\ x\in[2,3].$

Η συνάρτηση g είναι συνεχής στο [2, 3], ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων.

$$\left.\begin{array}{l} g(2)=e^{-2}-2+2=e^{-2}>0 \\ g(3)=e^{-3}-3+2=\dfrac{1}{e^{3}}-1=\dfrac{1-e^{3}}{e^{3}}<0 \end{array}\right\} g(2)\cdot g(3)<0.$$

Από το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(2,3)$ τέτοιο ώστε $g(x_0)=0 \Leftrightarrow f(x_0)=x_0$.

Επίσης $g'(x)=-e^{-x}-1<0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ άρα και 1–1, οπότε η x_0 είναι μοναδική λύση στο $\mathbb{R}$.

Β3. $f'(x)=-e^{-x}<0$. Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε είναι 1–1, άρα αντιστρέφεται.

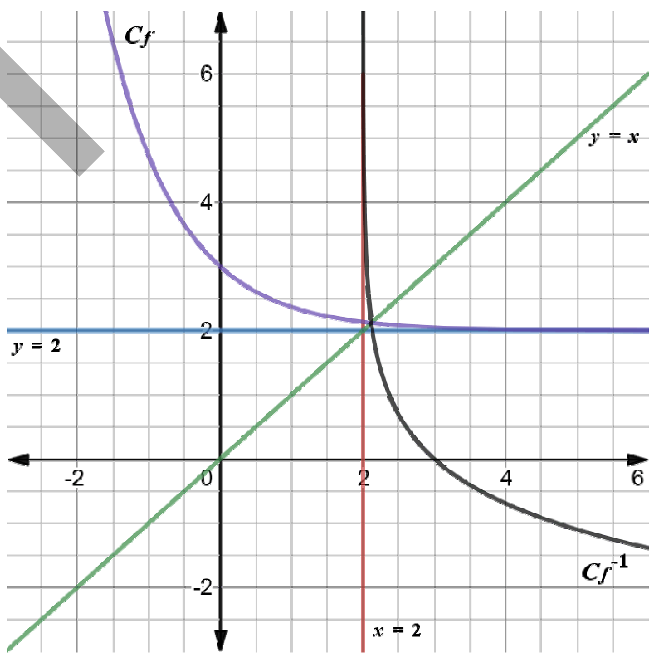
$$y=f(x)\Leftrightarrow y=e^{-x}+2\Leftrightarrow y-2=e^{-x}\underset{y>2}{\Leftrightarrow}\ln(y-2)=-x\Leftrightarrow x=-\ln(y-2)\Leftrightarrow f^{-1}(y)=-\ln(y-2),\quad y>2$$

Άρα $f^{-1}(x)=-\ln(x-2),\quad x>2$.

Β4. Είναι $\lim\limits_{x\to2^{+}} f^{-1}(x)=-\infty$, αφού εάν θέσουμε $x-2=u$ όταν $x\to2^{+}\Rightarrow u\to0^{+}$.

Άρα $\lim\limits_{x\to2^{+}} f^{-1}(x)=\lim\limits_{x\to2^{+}}\left[-\ln(x-2)\right]=-\lim\limits_{x\to2^{+}}\ln(x-2)=-\lim\limits_{u\to0^{+}}\ln u=+\infty$ διότι $\lim\limits_{u\to0^{+}}\ln u=-\infty$.

Άρα η $x=2$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης C_f.



ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η $f(x)$ είναι συνεχής στο $x_0 = 1$ ως παραγωγίσιμη.

Οπότε $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) \Leftrightarrow 1+\beta = 1+\alpha \Leftrightarrow \alpha = \beta$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-}\frac{e^{x-1}+\beta x-1-a}{x-1} = \lim_{x\to 1^-}\frac{e^{x-1}+\beta x-1-\beta}{x-1} \underset{(D.L.H)}{\overset{(\frac{0}{0})}{=}} \lim_{x\to 1^-}\frac{e^{x-1}+\beta}{1} =$$
$$= \beta + 1.$$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+}\frac{x^2+a-1-a}{x-1} = -\lim_{x\to 1^+}\frac{(x-1)\cdot(x+1)}{x-1} = 2$$

Επειδή η *f* είναι παραγωγίσιμη στο 1, πρέπει $\beta+1=2$, άρα $\beta=1$, οπότε και $\alpha=1$.

Γ2. Για $x>1$, $f'(x)=2x>0$ (1)

για $x<1$, $f'(x)=e^{x-1}+1>0$ (2)

και f συνεχής στο 1. (3)

Από (1), (2) και (3) συμπεραίνουμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}(x^2+1) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}(e^{x-1}+x) = -\infty$

Άρα $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

Γ3. **i.** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ **.**Άρα υπάρχει $\kappa \in (-\infty, 0)$ ώστε $f(\kappa)<0$, ενώ $f(0)=e^{-1}=\frac{1}{e}>0$

Επίσης η f είναι συνεχής στο R άρα και στο [κ, 0], άρα από Θεώρημα Bolzano στο $[\kappa, 0]$, υπάρχει $x_0 \in (\kappa, 0)$ ώστε $f(x_0)=0$. Η x_0 είναι μοναδική λόγω της μονοτονίας της *f*.

ii. $f^2(x) - x_0 f(x) = 0 \Leftrightarrow f(x)\cdot(f(x)-x_0)=0$ (1)

Ισχύει $f(x)\neq 0$ για κάθε $x>x_0$, άρα η (1) στο $(x_0,+\infty)$ είναι ισοδύναμη με την $f(x)-x_0=0 \Leftrightarrow f(x)=x_0$.

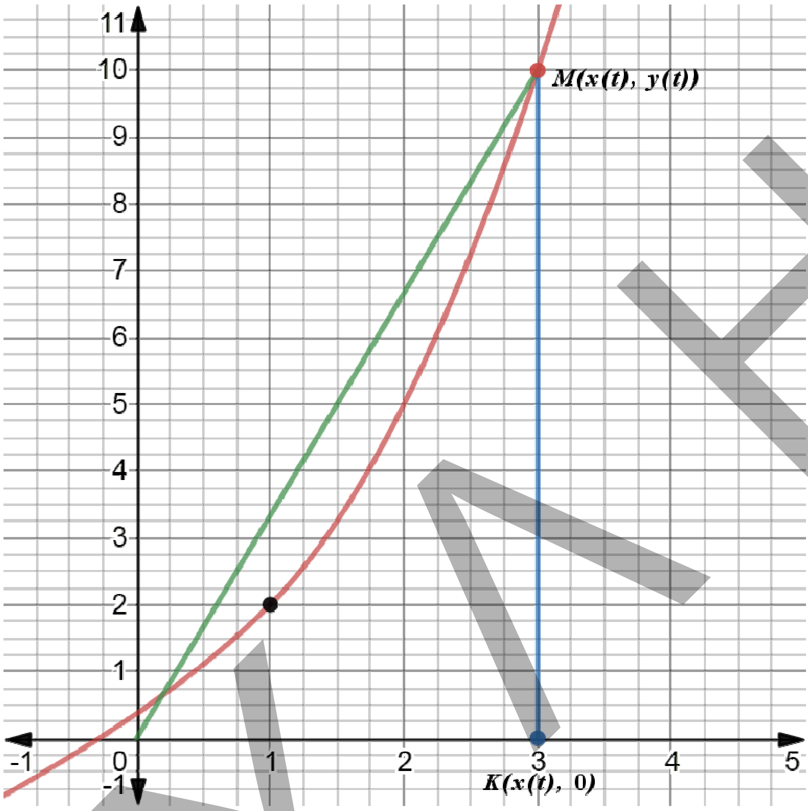
Η τελευταία είναι αδύνατη στο $(x_0,+\infty)$ διότι αφού η είναι *f* γνησίως αύξουσα, από x>x_0 έπεται $f(x)>f(x_0) \Leftrightarrow f(x)>0$ ενώ $x_0<0$.

Γ4. $M\left(x(t), y(t)\right) \Rightarrow y(t) = x^2(t) + 1$

$x(t_0) = 3$

$y(t_0) = 10$

$x'(t_0) = 2$



$$E(t) = \frac{1}{2} x(t) y(t) \Rightarrow$$

$$E'(t) = \frac{1}{2} x'(t) y(t) + \frac{1}{2} x(t) y'(t) \overset{t=t_0}{\Rightarrow}$$

$$E'(t_0) = \frac{1}{2} x'(t_0) y(t_0) + \frac{1}{2} x(t_0) y'(t_0) .$$

Ισχύει: $y'(t_0) = 2x(t_0)x'(t_0) = 2 \cdot 3 \cdot 2 = 12$

Άρα $E'(t_0) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 10 + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 12 = 28$ τμ/s .

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $f(x)=(x-1)\cdot\ln\left(x^2-2x+2\right)+\alpha x+\beta$

$\varepsilon: y=-x+2$

$f(1)=1 \Leftrightarrow \alpha+\beta=1$

$f'(1)=-1$

$$f'(x)=\ln\left(x^2-2x+2\right)+(x-1)\frac{2x-2}{x^2-2x+2}+\alpha$$

$f'(1)=-1 \Leftrightarrow \boxed{a=-1}$ και $\boxed{\beta=2}$

Δ2 $f(x)=(x-1)\cdot\ln\left(x^2-2x+2\right)-x+2$ Η f συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα και στο $[1,2]$

$$\mathrm{E}=\int_1^2\left|(x-1)\ln(x^2-2x+2)\cancel{-x}\cancel{+2}\cancel{+x}\cancel{-2}\right|\mathrm{d}x=$$

$$=\int_1^2\left|(x-1)\ln(x^2-2x+2)\right|\mathrm{d}x=\int_1^2\left|(x-1)\ln(x^2-2x+1+1)\right|\mathrm{d}x$$

$$=\int_1^2\left|(x-1)\ln[(x-1)^2+1)]\right|\mathrm{d}x$$

Για κάθε $x\in[1,2]$ είναι $(x-1)\geq 0,\ \ln[(\chi-1)^2+1]\geq \ln 1=0$.

Έστω $u=x^2-2x+2 \Leftrightarrow \mathrm{d}u=(2x-2)\mathrm{d}x \Leftrightarrow$

$$\mathrm{d}u=2(x-1)\mathrm{d}x \Leftrightarrow \frac{1}{2}\mathrm{d}u=(x-1)\mathrm{d}x$$

Για $x = 1 \Rightarrow u_1 = 1$

Για $x = 2 \Rightarrow u_1 = 2$

$$\mathrm{E}=\frac{1}{2}\int_1^2\ln u\,\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\left[u\ln u\right]_1^2-\frac{1}{2}\int_1^2 1\cdot\mathrm{d}u=$$

$$=\frac{1}{\cancel{2}}\left(\cancel{2}\ln 2\right)-\frac{1}{2}\cdot 1=\ln 2-\frac{1}{2}\ \text{τ.μ.}$$

Δ3. **i.** Είναι $f'(x)=\ln\left[(x-1)^2+1\right]+\dfrac{2(x-1)^2}{(x-1)^2+1}-1,\ \ x\in\mathbb{R}$

Προφανώς για κάθε $x\in\mathbb{R}$, ισχύει

$\ln\left[(x-1)^2+1\right]+\dfrac{2(x-1)^2}{(x-1)^2+1}\geq 0$. Η ισότητα ισχύει μόνο για $x=1$, επομένως

$$\ln\left[(x-1)^2+1\right]+\frac{2(x-1)^2}{(x-1)^2+1}-1\geq -1 \Leftrightarrow f'(x)\geq -1,\ \ \forall x\in\mathbb{R}.$$

ii. Είναι για $\lambda\in\mathbb{R}$, $f\left(\lambda+\dfrac{1}{2}\right)+\lambda\geq(\lambda-1)\ln\left(\lambda^2-2\lambda+2\right)+\dfrac{3}{2}\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)\geq(\lambda-1)\ln\left(\lambda^2-2\lambda+2\right)-\lambda+2-\frac{1}{2}\Leftrightarrow$$

$$\Rightarrow f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right) \geq f(\lambda)-\frac{1}{2} \quad (1)$$. Αρκεί επομένως να δειχθεί η (1).

Θεωρώντας τη συνάρτηση f στο διάστημα $\left[\lambda, \lambda+\frac{1}{2}\right]$ ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής, επομένως υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in \left(\lambda, \lambda+\frac{1}{2}\right)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi)=\frac{f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)-f(\lambda)}{\frac{1}{2}}$$. Όμως από Δ3 (i), είναι $f'(\xi) \geq -1$.

Άρα $\frac{f(\lambda+\frac{1}{2})-f(\lambda)}{\frac{1}{2}} \geq -1 \Leftrightarrow f(\lambda+\frac{1}{2})-f(\lambda) \geq -\frac{1}{2}$. Αποδείχθηκε η (1) και ισοδύναμα η αρχική.

Δ4. Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $g'(x)=-3x^2-1$.

Οι γραφικές παραστάσεις των f και g έχουν κοινή εφαπτόμενη, αν και μόνον υπάρχουν σημεία $A(x_1,f(x_1))$ και $B(x_2, g(x_2))$, ώστε να ταυτίζονται οι ευθείες:

y= $f'(x_1)(x-x_1)+f(x_1) \Leftrightarrow y=f'(x_1)\cdot x+f(x_1)-f'(x_1)\cdot x_1$ και

y = $g'(x_2)(x-x_2)+g(x_2) \Leftrightarrow y=g'(x_2)\cdot x+g(x_2)-g'(x_2)\cdot x_2$

Για να ταυτίζονται οι δύο αυτές ευθείες έπεται ότι αναγκαία θα πρέπει $f'(x_1)=g'(x_2)$ (Να έχουν ίσους συντελεστές διεύθυνσης).

Είναι όμως:

- $f'(x_1) \geq -1, \quad x_1 \in \mathbb{R}$ και η ισότητα ισχύει για $x_1 = 1$ (από **Δ3.i.**)
- $g'(x_2) \leq -1, \quad x_2 \in \mathbb{R}$ και η ισότητα ισχύει για $x_2 = 0$

Οπότε $f'(x_1) \geq g'(x_2)$ για κάθε ζεύγος (x_1, x_2), με την ισότητα $f'(x_1)=g'(x_2)$ να ισχύει αποκλειστικά και μόνον για $x_1=1$ και $x_2=0$.

Η εφαπτομένη της C_f στο $A(1,f(1))$ είναι $y=-x+2$ και η εφαπτομένη της C_g στο σημείο $B(0,2)$ είναι $y-2=-1(x-0) \Leftrightarrow y=-x+2$.

Άρα η ε μοναδική κοινή εφαπτομένη των C_f, C_g στα σημεία τους A, B αντίστοιχα.

ΕΝΑΛΛΑΚΤΙΚΟΙ ΤΡΟΠΟΙ ΛΥΣΗΣ ΣΕ ΕΠΙΜΕΡΟΥΣ ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ:

Γ3. i. Η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty, 1]$ και $[1, +\infty)$ άρα:

$f((-\infty,1]) = (\lim_{x\to-\infty} f(x), f(1)] = (-\infty, 2]$.

$f([1,+\infty)) = (f(1), \lim_{x\to+\infty} f(x)] = [2, +\infty)$.

Από τα επιμέρους σύνολα τιμών προκύπτει ότι υπάρχει x_0 στο διάστημα $(-\infty, 1]$ ώστε $f(x_0)=0$.

Ισοδύναμα $e^{x_0-1} + x_0=0$. Δηλαδή $x_0= - e^{x_0-1} <0$.

Δ3. i. Υπολογίζοντας τη δεύτερη παράγωγο της f έχουμε:

$$f''(x) = \frac{2(x-1)(x^2-2x+4)}{(x^2-2x+2)^2} = \frac{2(x-1)(x^2-2x+1+3)}{(x^2-2x+1+1)^2} = \frac{2(x-1)[(x-1)^2+3)]}{[(x-1)^2+1]^2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Προφανώς είναι $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in (-\infty, 1)$ και $f''(x) < 0$ για κάθε $x \in (1,+\infty)$ με την ισότητα να ισχύει για $x = 1$.

Άρα η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$.

Κατά συνέπεια η f' παρουσιάζει ελάχιστο (ολικό) για $x_0 = 1$, οπότε $f'(x) \geq f'(1) = -1$.

Δ3. ii. Η προς απόδειξη ανίσωση ισοδυναμεί με την $f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right) \geq f(\lambda) - \frac{1}{2}$ (1).

Η (1) γράφεται ισοδύναμα $f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right) + \lambda + \frac{1}{2} \geq f(\lambda) + \lambda \Leftrightarrow g(\lambda+\frac{1}{2}) \geq g(\lambda)$ (2).

όπου $g(x) = f(x) + x$.

Όμως για κάθε $x \in (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$ είναι $g'(x) = f'(x) + 1 > 0$.

Άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο R οπότε η (2) ισοδύναμα γράφεται $\lambda + \frac{1}{2} \geq \lambda$ που ισχύει.