ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ – ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΠΕΜΠΤΗ 18 ΙΟΥΝΙΟΥ 2020

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΑΛΓΕΒΡΑ)

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α λέγεται συνεχής;

Μονάδες 4

Α2. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Η συνάρτηση $f(x)=|x|$ έχει παράγωγο στο σημείο $x_o=0$.

β. Τα χαρακτηριστικά ως προς τα οποία εξετάζουμε έναν πληθυσμό λέγονται μεταβλητές και τις συμβολίζουμε συνήθως με κεφαλαία γράμματα.

γ. Η σχετική συχνότητα f_i της τιμής x_i δίνεται από τον τύπο $f_i=\frac{v}{v_i}$, όπου v_i η συχνότητα της τιμής x_i και v το μέγεθος του δείγματος.

Μονάδες 6

Α3. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τις παρακάτω ισότητες και να τις συμπληρώσετε.

α. $\left(f(x)\cdot g(x)\right)'=\cdots$

β. $\left(\sqrt{x}\right)'=\cdots\ ,\ \mu\varepsilon\ x>0$

γ. $(\sigma\upsilon\nu x)'=\cdots$

Μονάδες 9

Α4. Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της συνάρτησης $f(x)=x^2$ είναι $f'(x)=(x^2)'=2x$, για κάθε x στο σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Β

Στον παρακάτω πίνακα δίνεται ο αριθμός των βιβλίων που διάβασαν οι μαθητές ενός σχολείου κατά τη διάρκεια των καλοκαιρινών διακοπών:

x_i	v_i	$f_i\%$	N_i	$F_i\%$
0				
1				70
2	10			90
3		10		100
Σύνολο		100		

Δίνεται ότι το *40%* των μαθητών δεν διάβασαν κανένα βιβλίο.

Β1. Να μεταφέρετε τον παραπάνω πίνακα στο τετράδιό σας και να συμπληρώσετε τα κενά.

Μονάδες 12

Β2. Ποιο είναι το ποσοστό των μαθητών που έχουν διαβάσει τρία βιβλία;

Μονάδες 3

Β3. Πόσοι μαθητές διάβασαν τουλάχιστον ένα βιβλίο;

Μονάδες 5

Β4. Ποιο είναι το ποσοστό των μαθητών που διάβασαν το πολύ δύο βιβλία;

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=x^3-\lambda x^2+2$, όπου $\lambda\in\mathbb{R}$ σταθερά.

Γ1. Να βρείτε την τιμή του λ, ώστε η γραφική παράσταση της συνάρτησης f να διέρχεται από το σημείο $A(-1,-2)$.

Μονάδες 4

Γ2. Για $\lambda=3$ να βρείτε τις συναρτήσεις $f'(x)$ και $f''(x)$.

Μονάδες 6

Γ3. Για $\lambda=3$ να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το είδος και την τιμή των τοπικών ακροτάτων της.

Μονάδες 8

Γ4. Για $\lambda=3$ να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x\to 1}\frac{f'(x)+3}{f''(x)}.$$

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x)=\left(x^2+4x+5\right)^{20}.$$

Δ1. Να δείξετε ότι

$$f'(x)=40\left(x^2+4x+5\right)^{19}\cdot\left(x+2\right).$$

Μονάδες 5

Δ2. Να βρείτε το όριο:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(-2+h)-f(-2)}{h}.$$

Μονάδες 4

Δ3. Να δείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f, η οποία είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$, έχει εξίσωση $y=1$.

Μονάδες 8

Δ4. Θεωρούμε σημείο $A(x,1)$ της ευθείας $y=1$ με $x>0$. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της απόστασης των σημείων $A(x,1)$ και $O(0,0)$ ως προς x, όταν $x=1$.

Μονάδες 8

ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνον τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Δεν επιτρέπεται να γράψετε** καμιά άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα, **μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό ανεξίτηλης μελάνης**.
4. Κάθε επιστημονικά τεκμηριωμένη απάντηση είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Ώρα δυνατής αποχώρησης: **10.00 π.μ.**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ & ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΠΕΜΠΤΗ 18 ΙΟΥΝΙΟΥ 2020
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΑΛΓΕΒΡΑ)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 16

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α λέγεται συνεχής, αν για κάθε $x_0 \in A$ ισχύει $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Α2. **α.** Λάθος, **β.** Σωστό, **γ.** Λάθος.

Α3. **α.** $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

β. $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, με $x > 0$

γ. $(\text{συν}x)' = -\text{ημ}x$.

Α4. Σχολικό βιβλίο σελίδες 28-29

Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^2$. Έχουμε

$f(x+h) - f(x) = (x+h)^2 - x^2 = x^2 + 2xh + h^2 - x^2 = (2x+h)h$,

και για $h \neq 0$, $\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{(2x+h) \cdot h}{h} = 2x + h$.

Επομένως, $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} (2x + h) = 2x$.

Άρα $(x^2)' = 2x$

ΘΕΜΑ Β

Β1.

x_i	v_i	$f_i\%$	N_i	$F_i\%$
0	20	40	20	40
1	15	30	35	70
2	10	20	45	90
3	5	10	50	100
Σύνολο	50	100		

$f_1\% = 40 = F_1\%$
$f_2\% = F_2\% - F_1\% = 70 - 40 = 30$
$f_3\% = F_3\% - F_2\% = 90 - 70 = 20$
Η στήλη v_i προκύπτει από τη στήλη $f_i\%$ αν διαιρέσουμε δια 2
$N_1 = v_1 = 20$
$N_2 = N_1 + v_2 = 20 + 15 = 35$
$N_3 = N_2 + v_3 = 35 + 10 = 45$
$N_4 = v = 50$

Β2. $f_4\% = 10$, άρα **το 10% των μαθητών έχει διαβάσει τρία βιβλία**.

Β3. $v_2 + v_3 + v_4 = 30$, άρα **30 μαθητές διάβασαν ένα τουλάχιστον βιβλίο**.

Β4. $f_1\% + f_2\% + f_3\% = F_3\% = 90$,
άρα **το 90% των μαθητών διάβασαν το πολύ δύο βιβλία**.

ΘΕΜΑ Γ

$f(x) = x^3 - \lambda x^2 + 2,\ x \in IR$

Γ1. $A(-1, -2) \in C_f \Leftrightarrow f(-1) = -2 \Leftrightarrow (-1)^3 - \lambda(-1)^2 + 2 = -2 \Leftrightarrow$
$-1 - \lambda + 2 = -2 \Leftrightarrow -\lambda = -2 + 1 - 2 \Leftrightarrow -\lambda = -3 \Leftrightarrow \boldsymbol{\lambda = 3}$

Για $\lambda = 3$ είναι $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2,\ x \in IR$

Γ2. $f'(x) = (x^3 - 3x^2 + 2)' = \mathbf{3x^2 - 6x},\ x \in IR$
$f''(x) = (3x^2 - 6x)' = \mathbf{6x - 6},\ x \in IR$

Γ3. $f'(x) = 0 \iff 3x^2 - 6x = 0 \iff 3x \cdot (x - 2) = 0 \iff$

$3x = 0$ ή $x - 2 = 0 \iff x = 0$ ή $x = 2$

x	**-∞**	0		2	**+∞**
f΄(x)	**+**	○	**-**	○	**+**
f (x)	↗		↘		↗

Η f είναι γνησίως αύξουσα στα (-∞ , 0] και [2 , +∞), ενώ είναι γνησίως φθίνουσα στο [0 , 2].
Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο το f (0) = 2
Η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο το f (2) = -2

Γ4. $$\lim_{x\to1}\frac{f'(x)+3}{f''(x)} = \lim_{x\to1}\frac{3x^2-6x+3}{6x-6} = \lim_{x\to1}\frac{\cancel{3}\cdot(x^2-2x+1)}{\underset{2}{\cancel{6}}\cdot(x-1)}$$

$$= \lim_{x\to1}\frac{(x-1)^{\cancel{2}}}{2\cdot\cancel{(x-1)}} = \lim_{x\to1}\frac{x-1}{2} = \mathbf{0}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $$f'(x) = \left[(x^2+4x+5)^{20}\right]' = 20\cdot(x^2+4x+5)^{19}\cdot(x^2+4x+5)'$$

$$= 20\cdot(x^2+4x+5)^{19}\cdot(2x+4) = 20\cdot(x^2+4x+5)^{19}\cdot2\cdot(x+2)$$

$$= \mathbf{40\cdot(x^2+4x+5)^{19}\cdot(x+2)}$$

Δ2. $$\lim_{h\to0}\frac{f(-2+h)-f(-2)}{h} = f'(-2) = 40\cdot[(-2)^2+4(-2)+5]^{19}\cdot(-2+2)$$

$$= 40\cdot(4-8+5)^{19}\cdot0 = \mathbf{0}$$

Δ3. Πρέπει $f'(x_0) = 0 \Leftrightarrow 40 \cdot (x_0^2 + 4x_0 + 5)^{19} \cdot (x_0 + 2) = 0 \Leftrightarrow$

$x_0^2 + 4x_0 + 5 = 0$ ή $x_0 + 2 = 0$

- Η εξίσωση $x^2 + 4x + 5 = 0$ έχει διακρίνουσα αρνητική και δεν έχει πραγματικές ρίζες
- $x_0 + 2 = 0 \Leftrightarrow x_0 = -2$

$f(-2) = [(-2)^2 + 4 \cdot (-2) + 5]^{20} = (4 - 8 + 5)^{20} = 1^{20} = 1$

άρα $A(-2, 1)$ είναι το σημείο επαφής

Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της C_f είναι 0

και η ευθεία έχει εξίσωση $y = 0x + \beta$ ή $y = \beta$

Το σημείο $A(-2, 1)$ ανήκει στην ευθεία,

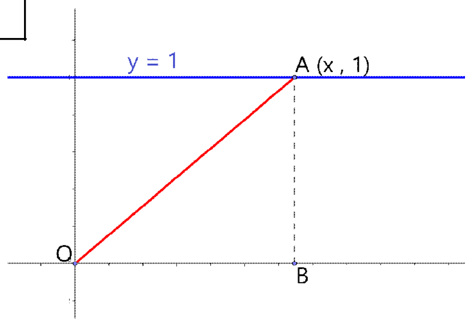
άρα επαληθεύει η εξίσωσή της, δηλαδή $1 = \beta$.

Επομένως η ευθεία έχει εξίσωση $\mathbf{y = 1}$.

Δ4. $\boxed{\begin{array}{l}\text{Η απόσταση (ΟΑ) δίνεται από τη συνάρτηση}\\ d(x) = \sqrt{(x - 0)^2 + (1 - 0)^2} = \sqrt{x^2 + 1},\ x > 0\end{array}}$

ή

$\boxed{\begin{array}{l}\text{Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΟΑΒ}\\ OA^2 = OB^2 + AB^2 = x^2 + 1^2 = x^2 + 1,\\ \text{άρα } d(x) = \sqrt{x^2 + 1},\ x > 0\end{array}}$



$$d'(x) = \left(\sqrt{x^2 + 1}\right)' = \frac{(x^2 + 1)'}{2\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}},\ x > 0$$

$$d'(1) = \frac{1}{\sqrt{1^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \mathbf{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$