ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
2002

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα [α, β]. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο [α, β], τότε να δείξετε ότι

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t)\,dt = G(\beta) - G(\alpha).$$

Μονάδες 12

Β.1. Έστω η συνάρτηση f(x) = ημx. Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει

$$f'(x) = συνx.$$

Μονάδες 8

Β.2. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Αν η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο [α,β] και συνεχής στο (α,β], τότε η f παίρνει πάντοτε στο [α,β] μία μέγιστη τιμή.

Μονάδα 1

β. Κάθε συνάρτηση, που είναι 1-1 στο πεδίο ορισμού της, είναι γνησίως μονότονη.

Μονάδα 1

γ. Αν υπάρχει το όριο της συνάρτησης f στο x_0 και $\lim_{x\to x_0} |f(x)| = 0$, τότε

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = 0.$$

Μονάδα 1

δ. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, τότε

$$\int f(x)dx = xf(x) - \int xf'(x)dx.$$

Μονάδα 1

ε. Αν $\lim_{x\to x_0} f(x) > 0$, τότε f(x) > 0 κοντά στο x_0.

Μονάδα 1

ΘΕΜΑ 2ο

Έστω z ένας μιγαδικός αριθμός και $f(\nu) = i^{\nu} z$, $\nu \in \mathbb{N}^*$.

α. Να δείξετε ότι $f(3) + f(8) + f(13) + f(18) = 0$.

Μονάδες 7

β. Αν $|z| = \rho$ και $Arg(z) = \theta$, να δείξετε ότι

$$f(13) = \rho \left[\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) + i\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) \right].$$

Μονάδες 8

γ. Αν $|z| = 2$ και $Arg(z) = \dfrac{\pi}{3}$, να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου με κορυφές τα σημεία του μιγαδικού επιπέδου που είναι εικόνες των μιγαδικών αριθμών 0, z και f(13).

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 3ο

Έστω οι συναρτήσεις f, g με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.
Δίνεται ότι η συνάρτηση της σύνθεσης fog είναι 1-1.

α. Να δείξετε ότι η g είναι 1-1.

Μονάδες 7

β. Να δείξετε ότι η εξίσωση:
$g(f(x) + x^3 - x) = g(f(x) + 2x - 1)$ έχει ακριβώς δύο θετικές και μία αρνητική ρίζα.

Μονάδες 18

ΘΕΜΑ 4ο

α. Έστω δύο συναρτήσεις h, g συνεχείς στο [α, β].
Να αποδείξετε ότι αν $h(x) > g(x)$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, τότε και

$$\int_{\alpha}^{\beta} h(x)dx > \int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx \ .$$

Μονάδες 2

β. Δίνεται η παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f, που ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$f(x) - e^{-f(x)} = x - 1, \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad f(0) = 0 .$$

ι) Να εκφραστεί η f ΄ ως συνάρτηση της f.

Μονάδες 5

ιι) Να δείξετε ότι $\dfrac{x}{2} < f(x) < x f'(x)$,
για κάθε $x > 0$.

Μονάδες 12

ιιι) Αν Ε είναι το εμβαδόν του χωρίου Ω που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της f, τις ευθείες $x = 0$, $x = 1$ και τον άξονα x΄x, να δείξετε ότι

$$\frac{1}{4} < E < \frac{1}{2} f(1)$$

Μονάδες 6

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Θεωρία. (απόδειξη σελ. 335 σχολ. βιβλίου).
Β.1. Θεωρία (σελίδες 224 - 225) σχολ. βιβλίου)
Β.2. α Λ
β Λ
γ Σ
δ Σ
ε Σ

ΘΕΜΑ 2ο

α. $f(3) + f(8) + f(13) + f(18) =$
$= i^3 \bullet z + i^8 \bullet z + i^{13} \bullet z + i^{18} \bullet z =$
$= i^2 \bullet i \bullet z + (i^2)^4 \bullet z + (i^2)^6 \bullet i \bullet z + (i^2)^9 \bullet z =$
$= (-1) \bullet i \bullet z + z + (-1)^6 \bullet i \bullet z + (-1)^9 \bullet z =$
$= - i \bullet z + z + i \bullet z - z = 0$

β. $|z| = \rho$, $Arg(z) = \theta$.
Για $\nu = 13$ έχουμε:
$f(13) = i^{13} \bullet z = (i^2)^6 \bullet i \bullet z = (-1)^6 \bullet i \bullet z = i \bullet z$

Επειδή ο μιγαδικός z έχει μέτρο ρ και πρωτεύον όρισμα θ, θα έχει την ακόλουθη τριγωνομετρική μορφή:
$z = |z|\,(\sigma\upsilon\nu\theta + i\,\eta\mu\theta) = \rho\,(\sigma\upsilon\nu\theta + i\eta\mu\theta)$ (1)
Η τριγωνομετρική μορφή του μιγαδικού αριθμού i είναι:

$$1 \cdot \left(\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2} + i\,\eta\mu\frac{\pi}{2}\right) \qquad (2)$$

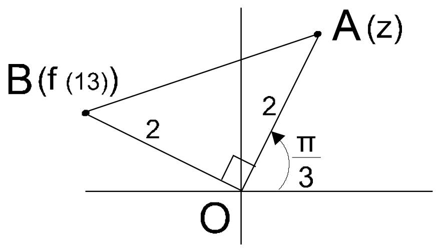
Επομένως ο μιγαδικός αριθμός $f(13) = i \bullet z$ γράφεται:

$$f(13) = \left[1 \cdot \left(\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2} + i\,\eta\mu\frac{\pi}{2}\right)\right]\left[\rho\left(\sigma\upsilon\nu\theta + i\,\eta\mu\theta\right)\right] =$$

$$= 1 \cdot \rho \cdot \left[\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) + i\,\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)\right] =$$

$$= \rho \cdot \left[\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) + i\,\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)\right]$$

γ. Σύμφωνα με το προηγούμενο ερώτημα και για ρ=2 , $\theta=\frac{\pi}{3}$ έχουμε: z = $2(\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} + i\eta\mu\frac{\pi}{3})$, f(13) =iz.Έτσι αν Α η εικόνα του z στο μιγαδικό επίπεδο, η εικόνα Β του f(13) = iz προκύπτει από στροφή της διανυσματικής ακτίνας Α του z κατά $\frac{\pi}{2}$.



Επειδή το τρίγωνο ΑΟΒ είναι ορθογώνιο στο Ο με μήκη κάθετων πλευρών 2, θα έχει εμβαδόν $\frac{2^2}{2} = 2$ τετραγωνικές μονάδες.

ΘΕΜΑ 3ο

α.

Επειδή η f είναι συνάρτηση έχουμε ότι για κάθε $x_1, x_2 \in R$ με $g(x_1) = g(x_2)$ έπεται

$f\big(g(x_1)\big) = f\big(g(x_2)\big)$ ή

$(f \circ g)(x_1) = (f \circ g)(x_2)$ (1)

Επειδή όμως η $f \circ g$ είναι 1-1 στο $\Re$ προκύπτει από την (1) ότι $x_1 = x_2$.

Έτσι δείξαμε ότι:

$\forall\, x_1, x_2 \in R$ με $g(x_1) = g(x_2)$ προκύπτει $x_1 = x_2$

Άρα η g είναι 1-1.

β.

Έχουμε:

$$g\big(f(x) + x^3 - x\big) = g\big(f(x) + 2x - 1\big)$$

Επειδή η g είναι 1-1 στο R, προκύπτει ότι:

$$f(x) + x^3 - x = f(x) + 2x - 1 \quad \text{ή}$$

$$x^3 - x = +2x - 1 \quad \text{ή}$$

$$x^3 - 3x + 1 = 0$$

Θεωρούμε την συνάρτηση:

$$h(x) = x^3 - 3x + 1 \quad , \ x \in R$$

Η h είναι παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική με:

$$h'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x - 1)(x + 1)$$

Η μονοτονία της h(x) φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
			Τ.μεγ. $h(-1)=3$		Τ.ελαχ. $h(1)=-1$		

- Η h στο διάστημα [-2, -1] ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ. Bolzano, αφού:
  - Η h συνεχής στο [-2, -1] ως πολυωνυμική και
  - $h(-2) \cdot h(-1) = (-1) \cdot (+3) = -3 < 0$

  Άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_1 \in (-2, -1)$ τέτοιο ώστε $h(x_1) = 0$.

  Επειδή η h στο $(-\infty, -1]$ είναι γνησίως αύξουσα η παραπάνω ρίζα x_1 είναι μοναδική στο $(-\infty, -1]$.

- Έχουμε $h(0) = 1$ και $h(1) = -1$.

  Επειδή η h είναι συνεχής στο [0, 1] και
  $$h(0) \cdot h(1) = 1 \cdot (-1) = -1 < 0$$
  προκύπτει ότι στο διάστημα (0, 1) η $h(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα x_2. Επειδή ακόμα η h είναι γνησίως φθίνουσα στο [-1, 1], προκύπτει ότι η ρίζα αυτή είναι μοναδική στο [-1, 1].

- Έχουμε $h(1) = -1$ και $h(2) = 3$

  Επειδή η h είναι συνεχής στο [1, 2] και
  $$h(1) \cdot h(2) = (-1) \cdot 3 = -3 < 0$$
  προκύπτει ότι στο διάστημα (1, 2) η $h(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα x_3. Επειδή ακόμα η h είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1, +\infty)$, προκύπτει ότι η ρίζα αυτή είναι μοναδική στο
  $[1, +\infty)$.

  Επειδή:
  - $x_1 \in (-2, -1)$ είναι $x_1 < 0$
  - $x_2 \in (0, 1)$ είναι $x_2 > 0$
  - $x_3 \in (1, 2)$ είναι $x_3 > 0$

  Έτσι η $h(x) = 0$ έχει ακριβώς δύο θετικές και μία αρνητική ρίζα στο R.

ΘΕΜΑ 4ο

α. Θεωρούμε τη συνάρτηση
$\varphi(x) = h(x) - g(x)$ $x \in [\alpha, \beta]$

Η $\varphi(x)$ είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων.

Επειδή είναι $h(x) > g(x)$ για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$ προκύπτει ότι

$\Phi(x) > 0$ για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$.

Σύμφωνα τώρα με το θεώρημα 3 σελίδα 332 σχολ. βιβλίου έχουμε:

$$\int_a^\beta \varphi(x)\,dx > 0 \quad ή \quad \int_a^\beta \big(h(x) - g(x)\big)dx > 0 \quad ή \quad \int_a^\beta f(x)dx - \int_a^\beta g(x)dx > 0$$

Άρα $\int_a^\beta h(x)\,dx > \int_a^\beta g(x)\,dx$.

β.i.

Αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο R έχουμε:

$f'(x) - e^{-f(x)}\,(-f(x))' = 1$ ή

$f'(x) + f'(x)\,e^{-f(x)} = 1$ ή

$f'(x)\,[1 + e^{-f(x)}] = 1$ ή

$f'(x) = \dfrac{1}{1+e^{-f(x)}}$, αφού $1 + e^{-f(x)} \neq 0$ για κάθε $x \in R$

Άρα $f'(x) = \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{e^{f(x)}}} = \dfrac{e^{f(x)}}{e^{f(x)}+1}$ με $x \in R$.

β.ii.

Επειδή είναι $f(0) = 0$ η ζητούμενη ανίσωση

$\dfrac{x}{2} < f(x) < x\,f'(x)$ για $x > 0$ γράφεται:

$\dfrac{x}{2} < f(x) - f(0) < x\,f'(x)$ ή $\dfrac{1}{2} < \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} < f'(x)$.

Η f στο $[0,x]$ ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0,x)$: $f'(\xi) = \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$.

Τότε όμως αρκεί να δειχθεί

$\dfrac{1}{2} < f'(\xi) < f'(x)$ ή

$\dfrac{e^{f(0)}}{1+e^{f(0)}} < f'(\xi) < f'(x)$ ή

$f'(0) < f'(\xi) < f'(x)$, με $0 < \xi < x$.

Έτσι αρκεί να δειχθεί ότι η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, x]$.

Υπολογίζοντας την $f''(x)$ έχουμε:

$$f''(x) = \left(\frac{e^{f(x)}}{1+e^{f(x)}}\right)' = \frac{e^{f(x)}\cdot f'(x)\cdot(1+e^{f(x)}) - e^{f(x)}\cdot e^{f(x)}\cdot f'(x)}{\left(1+e^{f(x)}\right)^2} = \frac{e^{f(x)}\cdot f'(x)}{\left(1+e^{f(x)}\right)^2} =$$

$$= \frac{e^{f(x)}\cdot \dfrac{e^{f(x)}}{1+e^{f(x)}}}{\left(1+e^{f(x)}\right)^2} = \frac{e^{2f(x)}}{\left[1+e^{f(x)}\right]^3} > 0 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Άρα f' γνησίως αύξουσα στο R άρα και στο $[0,x]$.

β.iii.

Από β.ii. είναι $f(x) > \dfrac{x}{2} > 0$ και επειδή η f είναι συνεχής ως παραγωγίσιμη στο R άρα και στο $[0,1]$, θα είναι $E = \int_0^1 f(x)\,dx$.

Οι συναρτήσεις $\dfrac{x}{2}$, $f(x)$, $xf'(x)$ είναι συνεχείς στο R, οπότε με βάση το ερώτημα α) από $\dfrac{x}{2} < f(x) < xf'(x)$ είναι:

$$\int_0^1 \frac{x}{2}dx < \int_0^1 f(x)dx < \int_0^1 xf'(x)dx \Leftrightarrow \left[\frac{x^2}{4}\right]_0^1 < E < \left[xf(x)\right]_0^1 - \int_0^1 f(x)dx \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4} < E < f(1) - E.$$

Έτσι $\dfrac{1}{4} < E$ και $2E < f(1) \Leftrightarrow E < \dfrac{1}{2}f(1)$.

Οπότε τελικά $\dfrac{1}{4} < E < \dfrac{1}{2}f(1)$.