

**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ  
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ  
2005**

**ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ**

**ΘΕΜΑ 1**

**A.1** Έστω μια συνάρτηση  $f$ , η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα  $[α, β]$ . Αν:

- η  $f$  είναι συνεχής στο  $[α, β]$  και
- $f(α) \neq f(β)$

δείξτε ότι για κάθε αριθμό  $\eta$  μεταξύ των  $f(α)$  και  $f(β)$  υπάρχει ένας, τουλάχιστον  $x_0 \in (α, β)$  τέτοιος, ώστε

$$f(x_0) = \eta .$$

**Μονάδες 9**

**A.2** Πότε η ευθεία  $y = \lambda x + \beta$  λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης  $f$  στο  $+\infty$ ;

**Μονάδες 4**

**B.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

**α.** Αν η  $f$  είναι συνεχής στο  $[α, β]$  με  $f(α) < 0$  και υπάρχει  $\zeta \in (α, β)$  ώστε  $f(\zeta) = 0$ , τότε κατ' ανάγκη  $f(β) > 0$ .

**Μονάδες 2**

**β.** Αν υπάρχει το  $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x))$ , τότε κατ' ανάγκη υπάρχουν τα  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  και  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ .

**Μονάδες 2**

**γ.** Αν η  $f$  έχει αντίστροφη συνάρτηση  $f^{-1}$  και η γραφική παράσταση της  $f$  έχει κοινό σημείο  $A$  με την ευθεία  $y = x$ , τότε το σημείο  $A$  ανήκει και στη γραφική παράσταση της  $f^{-1}$ .

**Μονάδες 2**

**δ.** Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$  και  $f(x) > 0$  κοντά στο  $x_0$ , τότε  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$ .

**Μονάδες 2**

**ε.** Αν η  $f$  είναι μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα  $\Delta$  και  $a$  είναι ένα σημείο του  $\Delta$ , τότε ισχύει  $\left( \int_a^x f(t) dt \right)' = f(x) - f(a)$  για κάθε  $x \in \Delta$ .

**Μονάδες 2**

στ. Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής σε ένα διάστημα  $\Delta$  και δε μηδενίζεται σ' αυτό, τότε αυτή ή είναι θετική για κάθε  $x \in \Delta$  ή είναι αρνητική για κάθε  $x \in \Delta$ , δηλαδή διατηρεί πρόσημο στο διάστημα  $\Delta$ .

**Μονάδες 2**

## ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί  $z_1, z_2, z_3$  με  $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 3$ .

α. Δείξτε ότι:  $\overline{z_1} = \frac{9}{z_1}$ .

**Μονάδες 7**

β. Δείξτε ότι ο αριθμός  $\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_1}$  είναι πραγματικός.

**Μονάδες 9**

γ. Δείξτε ότι:  $|z_1 + z_2 + z_3| = \frac{1}{3} |z_1 \cdot z_2 + z_2 \cdot z_3 + z_3 \cdot z_1|$ .

**Μονάδες 9**

## ΘΕΜΑ 3

Δίνεται η συνάρτηση  $f$  με τύπο  $f(x) = e^{\lambda x}$ ,  $\lambda > 0$ .

α. Δείξτε ότι η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα.

**Μονάδες 3**

β. Δείξτε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της  $f$ , η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων, είναι η  $y = \lambda x$ .  
Βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου επαφής  $M$ .

**Μονάδες 7**

γ. Δείξτε ότι το εμβαδόν  $E(\lambda)$  του χωρίου, το οποίο περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της  $f$ , της εφαπτομένης της στο σημείο  $M$  και του άξονα  $y'y$ , είναι  $E(\lambda) = \frac{e-2}{2\lambda}$ .

**Μονάδες 8**

δ. Υπολογίστε το  $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{\lambda^2 \cdot E(\lambda)}{2 + \eta\mu \lambda}$ .

**Μονάδες 7**

#### ΘΕΜΑ 4

Έστω μια συνάρτηση  $f$  παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  τέτοια, ώστε να ισχύει η σχέση  $2f'(x) = e^{x-f(x)}$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  και  $f(0) = 0$ .

α. Ναδειχθεί ότι:  $f(x) = \ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right)$ .

Μονάδες 6

β. Να βρεθεί το:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(x-t) dt}{\eta\mu x}$ .

Μονάδες 6

γ. Δίδονται οι συναρτήσεις:

$$h(x) = \int_x^x t^{2005} \cdot f(t) dt \text{ και } g(x) = \frac{x^{2007}}{2007}.$$

Δείξτε ότι  $h(x) = g(x)$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

Μονάδες 7

δ. Δείξτε ότι η εξίσωση  $\int_{-x}^x t^{2005} \cdot f(t) dt = \frac{1}{2008}$  έχει ακριβώς μία λύση στο  $(0, 1)$ .

Μονάδες 6

## ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

### ΘΕΜΑ 1

**A.1.** Θεώρημα ενδιάμεσων τιμών.

Έστω μια συνάρτηση  $f$ , η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα  $[\alpha, \beta]$ . Αν:

- η  $f$  είναι συνεχής στο  $[\alpha, \beta]$  και
- $f(\alpha) \neq f(\beta)$

τότε, για κάθε αριθμό  $\eta$  μεταξύ των  $f(\alpha)$  και  $f(\beta)$  υπάρχει ένας, τουλάχιστον  $x_0 \in (\alpha, \beta)$  τέτοιος ώστε  $f(x_0) = \eta$

**A.2.** Η ευθεία  $y = \lambda x + \beta$  λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της  $f$  στο  $+\infty$ , αν  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (\lambda x + \beta)] = 0$ .

**B.**

$\alpha \rightarrow \Lambda,$

$\beta \rightarrow \Lambda$

$\gamma \rightarrow \Sigma$

$\delta \rightarrow \Sigma$

$\varepsilon \rightarrow \Lambda$

$\sigma\tau \rightarrow \Sigma$

### ΘΕΜΑ 2

**α.** Από τη σχέση  $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 3$  έχουμε:

$$|z_1| = 3 \Leftrightarrow |z_1|^2 = 9 \Leftrightarrow z_1 \bar{z}_1 = 9 \Leftrightarrow \bar{z}_1 = \frac{9}{z_1}.$$

**β.** Αρκεί (\*) να δειχθεί ότι:

$$\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_1} = \overline{\left( \frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_1} \right)} \Leftrightarrow \frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_1} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} + \frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_1}.$$

Όμως  $\bar{z}_1 = \frac{9}{z_1}$ ,  $\bar{z}_2 = \frac{9}{z_2}$ ,  $\bar{z}_3 = \frac{9}{z_3}$  αφού  $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 3$ .

$$\text{Άρα } \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} + \frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_1} = \frac{\frac{9}{z_1}}{\frac{9}{z_2}} + \frac{\frac{9}{z_2}}{\frac{9}{z_1}} = \frac{z_2}{z_1} + \frac{z_1}{z_2}.$$

\* Ισχύει ότι  $z = \bar{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$

γιατί αν  $z = \alpha + \beta i$  τότε  $\bar{z} = \alpha - \beta i$  άρα  $z - \bar{z} = 2\beta i$  (1).

$$\text{Έτσι } z = \bar{z} \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} \beta = 0 \Leftrightarrow z \in \mathbf{IR}$$

γ. α' τρόπος

Είναι:

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2 + z_3| &= \left| \overline{z_1 + z_2 + z_3} \right| = \left| \overline{z_1} + \overline{z_2} + \overline{z_3} \right| = \left| \frac{9}{z_1} + \frac{9}{z_2} + \frac{9}{z_3} \right| = 9 \left| \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3} \right| = 9 \left| \frac{z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1}{z_1 z_2 z_3} \right| \\ &= 9 \frac{|z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1|}{|z_1| |z_2| |z_3|} = 9 \frac{|z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1|}{27} = \frac{1}{3} |z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1|. \end{aligned}$$

β' τρόπος

Είναι:

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2 + z_3|^2 &= \frac{1}{9} |z_1 \cdot z_2 + z_2 \cdot z_3 + z_3 \cdot z_1|^2 \Leftrightarrow \\ (z_1 + z_2 + z_3)(\overline{z_1 + z_2 + z_3}) &= \frac{1}{9} (z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1)(\overline{z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1}) \\ (z_1 + z_2 + z_3)(\overline{z_1} + \overline{z_2} + \overline{z_3}) &= \frac{1}{9} (z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1)(\overline{z_1 z_2} + \overline{z_2 z_3} + \overline{z_3 z_1}) \\ (z_1 + z_2 + z_3) \left( \frac{9}{z_1} + \frac{9}{z_2} + \frac{9}{z_3} \right) &= \frac{1}{9} (z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1) \left( \frac{81}{z_1 z_2} + \frac{81}{z_2 z_3} + \frac{81}{z_3 z_1} \right) \\ 9(z_1 + z_2 + z_3) \left( \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3} \right) &= \frac{81}{9} (z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1) \left( \frac{1}{z_1 z_2} + \frac{1}{z_2 z_3} + \frac{1}{z_3 z_1} \right) \\ \left( 1 + \frac{z_1}{z_2} + \frac{z_1}{z_3} + \frac{z_2}{z_1} + 1 + \frac{z_2}{z_3} + \frac{z_3}{z_1} + \frac{z_3}{z_2} + 1 \right) &= \left( 1 + \frac{z_1 z_2}{z_2 z_3} + \frac{z_1 z_2}{z_3 z_1} + \frac{z_2 z_3}{z_1 z_2} + 1 + \frac{z_2 z_3}{z_3 z_1} + \frac{z_3 z_1}{z_1 z_2} + \frac{z_3 z_1}{z_2 z_3} + 1 \right) \\ \frac{z_1}{z_2} + \frac{z_1}{z_3} + \frac{z_2}{z_1} + \frac{z_2}{z_3} + \frac{z_3}{z_1} + \frac{z_3}{z_2} &= \frac{z_1}{z_3} + \frac{z_2}{z_3} + \frac{z_3}{z_1} + \frac{z_2}{z_1} + \frac{z_3}{z_2} + \frac{z_1}{z_2}. \end{aligned}$$

Η τελευταία ισχύει προφανώς, άρα και η αρχική.

### ΘΕΜΑ 3

α. Η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbf{R}$  ως σύνθεση παραγωγισίμων συναρτήσεων σ' αυτό, με  $f'(x) = (e^{\lambda x})' = e^{\lambda x} \cdot (\lambda x)' = \lambda e^{\lambda x}$ ,  $x \in \mathbf{R}$ .

Είναι  $\lambda > 0$ ,  $e^{\lambda x} > 0$  για κάθε  $x \in \mathbf{R}$ , οπότε  $f'(x) > 0$  για κάθε  $x \in \mathbf{R}$ . Άρα  $f$  γνησίως αύξουσα στο  $\mathbf{R}$ .

β. Έστω  $(x_0, f(x_0))$  οι συντεταγμένες του σημείου  $M$ . Τότε η εξίσωση της εφαπτομένης στο  $M$  είναι

$$(\epsilon): y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \Leftrightarrow y - e^{\lambda x_0} = \lambda e^{\lambda x_0}(x - x_0).$$

Για να διέρχεται η  $(\epsilon)$  από την αρχή των αξόνων πρέπει και αρκεί:

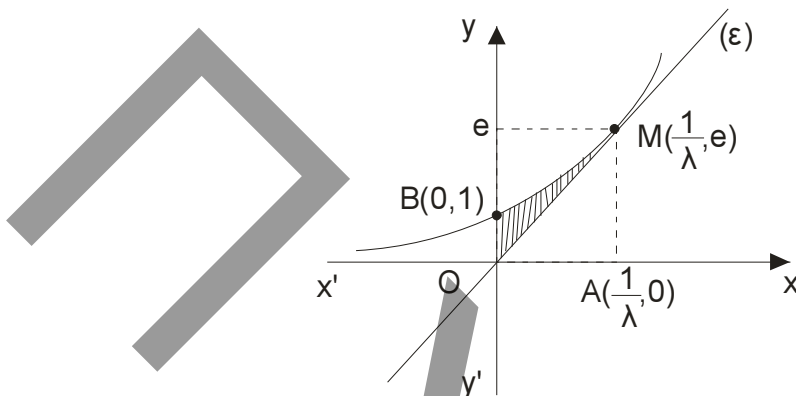
$$0 - e^{\lambda x_0} = \lambda e^{\lambda x_0} (0 - x_0) \Leftrightarrow -1 = \lambda(-x_0) \Leftrightarrow x_0 = \frac{1}{\lambda}.$$

Έτσι η  $(\varepsilon)$  γίνεται:

$$y - e = \lambda e \left(x - \frac{1}{\lambda}\right) \Leftrightarrow y = \lambda e x.$$

Οι συντεταγμένες του  $M$  είναι:  $M\left(\frac{1}{\lambda}, e\right)$ .

γ.



Το ζητούμενο εμβαδόν όπως φαίνεται από το σχήμα ισούται με:

$$(OAMB) - (OAM) = \int_0^{\frac{1}{\lambda}} e^{\lambda x} dx - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\lambda} \cdot e = \left[ \frac{1}{\lambda} e^{\lambda x} \right]_0^{\frac{1}{\lambda}} - \frac{e}{2\lambda} = \frac{1}{\lambda} \cdot e - \frac{1}{\lambda} - \frac{e}{2\lambda} = \frac{2e - 2 - e}{2\lambda} = \frac{e - 2}{2\lambda}.$$

$$\delta. \text{ Είναι } \frac{\lambda^2 \cdot E(\lambda)}{2 + \eta\mu\lambda} = \frac{\lambda^2 \cdot \frac{e - 2}{2\lambda}}{2 + \eta\mu\lambda} = \frac{(e - 2)\lambda}{2(2 + \eta\mu\lambda)} = \frac{e - 2}{2} \cdot \frac{1}{\frac{2 + \eta\mu\lambda}{\lambda}}.$$

Για κάθε  $\lambda > 0$  είναι:

$$-1 \leq \eta\mu\lambda \leq 1 \Leftrightarrow 1 \leq 2 + \eta\mu\lambda \leq 3 \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{\lambda} \leq \frac{2 + \eta\mu\lambda}{\lambda} \leq \frac{3}{\lambda}.$$

Όμως  $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\lambda}\right) = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{\lambda}\right) = 0$ , οπότε με βάση το κριτήριο παρεμβολής είναι

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{2 + \eta\mu\lambda}{\lambda} = 0, \text{ ενώ } \frac{2 + \eta\mu\lambda}{\lambda} > 0.$$

Έτσι  $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{2 + \eta\mu\lambda}{\lambda}} = +\infty$  και αφού  $\frac{e - 2}{2} > 0$  προκύπτει τελικά ότι

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{\lambda^2 \cdot E(\lambda)}{2 + \eta\mu\lambda} = +\infty.$$

Παρατήρηση:

Για την εύρεση του εμβαδού του χωρίου  $E(\lambda)$  είναι δυνατόν να μη χρησιμοποιηθεί το σχήμα ως εξής:

Για την  $f(x) = e^{\lambda x}$  είναι  $f'(x) = \lambda e^{\lambda x}$  και  $f''(x) = \lambda^2 e^{\lambda x} > 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

Έτσι η  $f$  είναι κυρτή στο  $\mathbb{R}$  οπότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της  $f$  σε κάθε σημείο της, βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση με εξαίρεση το σημείο επαφής. (Σχόλιο σελ. 274 σχολικού βιβλίου).

Έτσι  $f(x) \geq \lambda e^x \Leftrightarrow f(x) - \lambda e^x \geq 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . Η συνάρτηση

$g(x) = f(x) - \lambda e^x$  είναι συνεχής ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων στο  $\left[0, \frac{1}{\lambda}\right]$

οπότε το ζητούμενο εμβαδόν ισούται με:

$$E(\lambda) = \int_0^{\frac{1}{\lambda}} (f(x) - \lambda e^x) dx = \int_0^{\frac{1}{\lambda}} (e^{\lambda x} - \lambda e^x) dx = \left[ \frac{1}{\lambda} e^{\lambda x} - \frac{\lambda e^x}{2} \right]_0^{\frac{1}{\lambda}} = \dots = \frac{e-2}{2\lambda}.$$

#### ΘΕΜΑ 4

α. Από τη δοσμένη σχέση  $2f'(x) = e^{x-f(x)}$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  έχουμε:

$$2f'(x) = \frac{e^x}{e^{f(x)}} \quad \text{ή}$$

$$2f'(x)e^{f(x)} = e^x \quad \text{ή}$$

$$f'(x)e^{f(x)} = \frac{1}{2}e^x \quad \text{ή}$$

$$(e^{f(x)})' = \frac{1}{2}e^x \quad \text{ή}$$

$$(e^{f(x)})' = \left(\frac{e^x}{2}\right)' \Leftrightarrow$$

$$e^{f(x)} = \frac{e^x}{2} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Για  $x=0$  έχουμε:  $e^{f(0)} = \frac{e^0}{2} + C$

η οποία λόγω του ότι  $f(0) = 0$  γράφεται:

$$e^0 = \frac{e^0}{2} + C \Leftrightarrow 1 = \frac{1}{2} + C \Leftrightarrow C = \frac{1}{2}.$$

Οπότε:  $e^{f(x)} = \frac{e^x}{2} + \frac{1}{2} \Leftrightarrow e^{f(x)} = \frac{e^x + 1}{2}.$

Άρα:  $f(x) = \ln\left(\frac{e^x + 1}{2}\right).$

β. Θέτουμε  $x - t = u$ .

Διαφορίζουμε την τελευταία και βρίσκουμε  $du = -dt$ .

Επιπλέον για  $t=0$  είναι  $u=x$ , ενώ για  $t=x$  είναι  $u=0$ .

Έτσι:

$$\int_0^x f(x-t) dt = -\int_x^0 f(u) du = \int_0^x f(u) du$$

Επομένως:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(x-t) dt}{\eta\mu x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(u) du}{\eta\mu x}.$$

Η  $f$  είναι συνεχής στο  $\mathbb{R}$ , οπότε η  $\int_0^x f(u) du$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  με

$$\left( \int_0^x f(u) du \right)' = f(x).$$

Επειδή η  $\int_0^x f(u) du$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  θα είναι και συνεχής σ' αυτό.

$$\text{Επομένως: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(u) du}{\eta\mu x} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left( \int_0^x f(u) du \right)'}{(\eta\mu x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\sigma\upsilon\nu x} = \frac{f(0)}{\sigma\upsilon\nu 0} = f(0) = 0.$$

(Η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$ , άρα είναι και συνεχής σ' αυτό.)

γ. Είναι

$$h(x) = \int_{-x}^x t^{2005} f(t) dt = \int_{-x}^0 t^{2005} f(t) dt + \int_0^x t^{2005} f(t) dt = \int_0^x t^{2005} f(t) dt - \int_0^{-x} t^{2005} f(t) dt.$$

Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση  $\varphi(t) = t^{2005} \cdot f(t)$  η  $h(x)$  γράφεται:

$$h(x) = \int_0^x \varphi(t) dt - \int_0^{-x} \varphi(t) dt.$$

Η  $\varphi(t) = t^{2005} \cdot f(t)$  είναι συνεχής στο  $\mathbb{R}$ , άρα η συνάρτηση  $\kappa(x) = \int_0^x \varphi(t) dt$  είναι

παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  με  $\kappa'(x) = \varphi(x) = x^{2005} \cdot f(x)$ , όπως επίσης είναι

παραγωγίσιμη και η συνάρτηση  $\kappa(-x) = \int_0^{-x} \varphi(t) dt$  ως σύνθεση των

παραγωγισίμων  $-x$ ,  $\kappa(x)$ , με  $(\kappa(-x))' = \varphi(-x)(-x)' = -\varphi(-x)$ .

Επομένως

$$\begin{aligned} h'(x) &= (\kappa(x) - \kappa(-x))' = \varphi(x) + \varphi(-x) = x^{2005} f(x) + (-x)^{2005} f(-x) = \\ &= x^{2005} \cdot \ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right) - x^{2005} \cdot \ln\left(\frac{1+e^{-x}}{2}\right) = x^{2005} \cdot \ln\left(\frac{1+e^x}{1+e^{-x}}\right) = x^{2005} \cdot \ln\left(\frac{1+e^x}{1+e^{-x}}\right) = \end{aligned}$$

$$= x^{2005} \cdot \ln\left(\frac{1+e^x}{1+\frac{1}{e^x}}\right) = x^{2005} \cdot \ln\left[\frac{e^x(1+e^x)}{(e^x+1)}\right] = x^{2005} \cdot \ln e^x = x^{2005} \cdot x = x^{2006}.$$

Ακόμα η  $g(x) = \frac{x^{2007}}{2007}$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  με  $g'(x) = 2007 \cdot \frac{x^{2006}}{2007} = x^{2006}$ .

Επειδή  $h'(x) = g'(x)$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  είναι  $h(x) = g(x) + c$ ,  $c \in \mathbb{R}$ .

Όμως για  $x = 0$  είναι  $h(0) = g(0) = 0$ , άρα  $c = 0$ .

Επομένως  $h(x) = g(x)$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

δ. Η εξίσωση  $\int_{-x}^x t^{2005} f(t) dt = \frac{1}{2008}$  λόγω του ερωτήματος γ γράφεται ισοδύναμα

$$\frac{x^{2007}}{2007} = \frac{1}{2008} \Leftrightarrow 2008x^{2007} - 2007 = 0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$P(x) = 2008x^{2007} - 2007, x \in [0, 1].$$

Η  $P$  είναι συνεχής στο  $\mathbb{R}$ , άρα και στο  $[0, 1]$  ως πολυωνυμική.

$$P(0) = -2007 < 0 \text{ κ' } P(1) = 1 > 0$$

Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον  $x_0 \in (0, 1)$  τέτοιο ώστε  $P(x_0) = 0$ .

Επιπλέον η  $P(x)$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  ως πολυωνυμική, άρα και στο  $[0, 1]$  με  $P'(x) = 2008 \cdot 2007x^{2006}$ .

Είναι  $P'(x) > 0$  για κάθε  $x \in (0, 1)$  οπότε η  $P$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $(0, 1)$ . Άρα η  $P(x) = 0$  έχει ακριβώς μία ρίζα στο  $(0, 1)$ .