

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ & ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

2008

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

A. Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της σταθερής συνάρτησης $f(x)=c$ (όπου x πραγματικός αριθμός) είναι ίση με 0, δηλαδή $(c)'=0$.

Μονάδες 8

B. Πώς ορίζεται ο συντελεστής μεταβολής ή συντελεστής μεταβλητότητας μιας μεταβλητής x , αν και πώς, αν $\bar{x} > 0$ και πώς, αν $\bar{x} < 0$

Μονάδες 7

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Αν A, B είναι δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω , τότε ο τύπος

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

ισχύει μόνον όταν τα απλά ενδεχόμενα του δειγματικού χώρου Ω είναι ισοπίθανα.

Μονάδες 2

β. Η διάμεσος δ ενός δείγματος n παρατηρήσεων t_1, t_2, \dots, t_n είναι πάντοτε μία από τις παρατηρήσεις αυτές.

Μονάδες 2

γ. Αν $x > 0$, τότε $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Μονάδες 2

δ. Αν x_0 είναι ένας πραγματικός αριθμός τότε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \eta\mu x = \eta\mu x_0$$

Μονάδες 2

ε. Στο ιστόγραμμα συχνοτήτων ομαδοποιημένων δεδομένων, το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από το πολύγωνο συχνοτήτων και τον οριζόντιο άξονα είναι ίσο με το μέγεθος του δείγματος.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x) = \frac{x-1}{e^x}$, όπου x πραγματικός αριθμός.

α. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x f(x)}{x^2 - 1}$

Μονάδες 7

β. Να αποδείξετε ότι $e^x f'(x) = 2 - x$

Μονάδες 9

γ. Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x)$.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 3ο

Για δύο τύπους μπαταριών A και B επιλέχθηκαν δύο δείγματα μεγέθους 5 το καθένα. Οι χρόνοι ζωής των μπαταριών για το κάθε δείγμα (σε χιλιάδες ώρες) δίνονται στον επόμενο πίνακα:

| A | B |
|----|----|
| 20 | 26 |
| 26 | 32 |
| 24 | 19 |
| 22 | 20 |
| 18 | 23 |

α. Να βρείτε τη μέση διάρκεια ζωής μιας μπαταρίας τύπου A και μιας μπαταρίας τύπου B.

Μονάδες 5

β. Αν μια μπαταρία τύπου A στοιχίζει 38 ευρώ και μια μπαταρία τύπου B στοιχίζει 40 ευρώ, ποιον τύπο μπαταρίας συμφέρει να αγοράσετε; (Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας).

Μονάδες 5

γ. Να βρείτε τις τυπικές αποκλίσεις S_A και S_B της διάρκειας ζωής των δύο τύπων μπαταριών.

Μονάδες 7

δ. Να βρείτε ποιος από τους δύο τύπους μπαταριών A και B παρουσιάζει τη μεγαλύτερη ομοιογένεια ως προς τη διάρκεια ζωής του. Δίνεται ότι $\sqrt{11} \cong 3,3$

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 4ο

Το 50% των κατοίκων μιας πόλης διαβάζουν την εφημερίδα α, ενώ το 30% των κατοίκων διαβάζουν την εφημερίδα α και δεν διαβάζουν την εφημερίδα β.

α. Ποια είναι η πιθανότητα ένας κάτοικος της πόλης, που επιλέγεται τυχαία, να μη διαβάζει την εφημερίδα α ή να διαβάζει την εφημερίδα β;

Μονάδες 7

β. Ορίζουμε το ενδεχόμενο:

B: «ένας κάτοικος της πόλης που επιλέγεται τυχαία, διαβάζει την εφημερίδα β».

Να αποδείξετε ότι

$$\frac{1}{5} \leq P(B) \leq \frac{7}{10}$$

Μονάδες 9

γ. Θεωρούμε τη συνάρτηση με τύπο:

$$f(x) = x^3 - \frac{1}{2}x^2 + P(B)x$$

όπου x πραγματικός αριθμός και B το ενδεχόμενο που ορίστηκε στο προηγούμενο ερώτημα. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f(x) δεν έχει ακρότατα.

Μονάδες 9

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

A. Θεωρία: (Η παράγωγος της σταθερής συνάρτησης $f(x) = c$). Σελ. 28 σχολ. βιβλίο.

B. Θεωρία: Σελ. 96 σχολ. βιβλίο.

Γ.

α - Δ

β - Δ

γ - Σ

δ - Σ

ε - Σ.

ΘΕΜΑ 2ο

α. Είναι $\frac{e^x f(x)}{x^2 - 1} = \frac{e^x}{x^2 - 1} \cdot \frac{x-1}{e^x} = \frac{1}{x+1}$

Έτσι $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x f(x)}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}$.

β. Είναι $f'(x) = \left(\frac{x-1}{e^x}\right)' = \frac{(x-1)'e^x - (x-1)(e^x)'}{e^{2x}} =$
 $= \frac{e^x - e^x(x-1)}{e^{2x}} = \frac{e^x(1-x+1)}{e^{2x}} = \frac{2-x}{e^x}$

Έτσι: $e^x f'(x) = e^x \cdot \frac{2-x}{e^x} = 2-x$.

γ. Επειδή $e^x > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, προκύπτουν:

i) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$

ii) $f'(x) > 0 \Leftrightarrow 2-x > 0 \Leftrightarrow x < 2$

iii) $f'(x) < 0 \Leftrightarrow 2-x < 0 \Leftrightarrow x > 2$

Δηλαδή έχουμε τον επόμενο πίνακα μεταβολών:

| | | | |
|----|-----------|-----------------|-----------|
| x | $-\infty$ | 2 | $+\infty$ |
| f' | + | ○ | - |
| f | | $\frac{1}{e^2}$ | |

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 2]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[2, +\infty)$, ενώ $f'(2) = 0$.

Άρα η f έχει μέγιστο για $x = 2$, $f(2) = \frac{1}{e^2}$.

ΘΕΜΑ 3ο

α.
$$\bar{x}_A = \frac{20+26+24+22+18}{5} = \frac{110}{5} = 22$$

$$\bar{x}_B = \frac{26+32+19+20+23}{5} = \frac{120}{5} = 24$$

β. Κατά μέσο όρο μια μπαταρία τύπου Α στοιχίζει $\frac{38}{22} = \frac{19}{11}$ ευρώ / χίλιες ώρες, ενώ

μια μπαταρία τύπου Β στοιχίζει $\frac{40}{24} = \frac{5}{3}$ ευρώ / χίλιες ώρες

Επειδή $\frac{5}{3} < \frac{19}{11}$ συμφέρει να αγορασθεί μπαταρία τύπου Β.

γ.
$$S_A^2 = \frac{1}{5} [(20-22)^2 + (26-22)^2 + (24-22)^2 + (22-22)^2 + (18-22)^2] =$$

$$= \frac{1}{5} [(-2)^2 + (4)^2 + 2^2 + 0^2 + (-4)^2] =$$

$$= \frac{1}{5} (4+16+4+16) = \frac{40}{5} = 8$$

οπότε

$$S_A = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$S_B^2 = \frac{1}{5} [(26-24)^2 + (32-24)^2 + (19-24)^2 + (20-24)^2 + (23-24)^2] =$$

$$= \frac{1}{5} [(2)^2 + 8^2 + (-5)^2 + (-4)^2 + 1^2] =$$

$$= \frac{1}{5} (4+64+25+16+1) = \frac{110}{5} = 22$$

οπότε

$$S_B = \sqrt{22} = \sqrt{2}\sqrt{11}$$

$$\delta. \quad CV_A = \frac{S_A}{\bar{x}_A} = \frac{2\sqrt{2}}{22} = \frac{\sqrt{2}}{11}.$$

$$CV_B = \frac{S_B}{\bar{x}_B} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{11}}{24}.$$

Είναι $CV_B > CV_A$ διότι $\frac{\sqrt{2}\sqrt{11}}{24} > \frac{\sqrt{2}}{11} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{11}}{24} > \frac{1}{11} \Leftrightarrow 11\sqrt{11} > 24$, που ισχύει επειδή $\sqrt{11} \cong 3,3$ και $11 \cdot 3,3 > 24 \Leftrightarrow 36,3 > 24$.

Άρα το δείγμα A παρουσιάζει μεγαλύτερη ομοιογένεια ως προς την διάρκεια ζωής σε σχέση με το δείγμα B.

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω A το ενδεχόμενο οι κάτοικοι της πόλης να διαβάζουν την εφημερίδα α και B το ενδεχόμενο να διαβάζουν την εφημερίδα β.

Τότε από τα δεδομένα προκύπτει ότι: $P(A) = 0,5$, $P(A - B) = 0,3$.

α. Ζητείται η $P(A' \cup B)$.

$$\begin{aligned} \text{Όμως } P(A' \cup B) &= P(A') + P(B) - P(A' \cap B) = 1 - P(A) + P(B) - P(B - A) = \\ &= 1 - P(A) + P(B) - [P(B) - P(A \cap B)] = 1 - P(A) + P(A \cap B) = \\ &= 1 - [P(A) - P(A \cap B)] = 1 - P(A - B) = 1 - 0,3 = 0,7 = \frac{7}{10}. \end{aligned}$$

β. Επειδή $B \subseteq A' \cup B \Rightarrow P(B) \leq P(A' \cup B) \Rightarrow P(B) \leq \frac{7}{10}$.

Επίσης από $P(A - B) = 0,3$ έχουμε:

$$P(A) - P(A \cap B) = 0,3 \Leftrightarrow 0,5 - P(A \cap B) = 0,3 \Leftrightarrow P(A \cap B) = 0,2 = \frac{1}{5}.$$

Όμως $A \cap B \subseteq B \Rightarrow P(A \cap B) \leq P(B) \Rightarrow \frac{1}{5} \leq P(B)$.

γ. Είναι $f'(x) = 3x^2 - x + P(B)$.

Η f' είναι ένα τριώνυμο με διακρίνουσα $\Delta = 1 - 12 \cdot P(B)$.

Επειδή $P(B) \geq \frac{1}{5}$ έπεται $-12P(B) \leq -\frac{12}{5}$ και $1 - 12P(B) \leq 1 - \frac{12}{5} = -\frac{7}{5} < 0$

Αφού $\Delta < 0$, είναι $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbf{R}$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbf{R} και επομένως δεν έχει ακρότατα.