

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ & ΕΠΑ.Λ. Β'

20 ΜΑΪΟΥ 2009

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1^ο

Α. Έστω μία συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αν η f είναι συνεχής στο Δ και για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ ισχύει $f'(x) = 0$, να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ .

Μονάδες 10

Β. Πότε μία συνάρτηση f λέγεται παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 5

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Αν z_1, z_2 είναι μιγαδικοί αριθμοί, τότε ισχύει:

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$$

Μονάδες 2

β. Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A λέμε ότι παρουσιάζει (ολικό) ελάχιστο στο $x_0 \in A$, όταν $f(x) \geq f(x_0)$ για κάθε $x \in A$.

Μονάδες 2

γ. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - 1}{x} = 1$

Μονάδες 2

δ. Κάθε συνάρτηση f συνεχής σε ένα σημείο του πεδίου ορισμού της είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.

Μονάδες 2

ε. Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$ και ισχύει $f(x) < 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, τότε το εμβαδόν του χωρίου Ω που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της f , τις ευθείες $x = \alpha$, $x = \beta$ και τον άξονα $x'x$ είναι:

$$E(\Omega) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$$

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2^ο

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς:

$$z = (2\lambda + 1) + (2\lambda - 1)i, \lambda \in \mathbb{R}$$

Α. α. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας πάνω στην οποία βρίσκονται οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών z , για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 9

- β. Από τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς να αποδείξετε ότι ο μιγαδικός αριθμός $z_0 = 1 - i$ έχει το μικρότερο δυνατό μέτρο.

Μονάδες 8

- Β. Να βρεθούν οι μιγαδικοί αριθμοί w οι οποίοι ικανοποιούν την εξίσωση

$$|w|^2 + \bar{w} - 12 = z_0$$

όπου z_0 ο μιγαδικός αριθμός που αναφέρεται στο προηγούμενο ερώτημα.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 3^ο

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \alpha^x - \ln(x + 1), \quad x > -1,$$

όπου $\alpha > 0$ και $\alpha \neq 1$.

- Α. Αν ισχύει $f(x) \geq 1$ για κάθε $x > -1$ να αποδείξετε ότι $\alpha = e$.

Μονάδες 8

- Β. Για $\alpha = e$,

α. να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή.

Μονάδες 5

β. να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-1, 0]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0, +\infty)$

Μονάδες 6

γ. αν $\beta, \gamma \in (-1, 0) \cup (0, +\infty)$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$\frac{f(\beta) - 1}{x - 1} + \frac{f(\gamma) - 1}{x - 2} = 0$$

έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(1, 2)$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ 4^ο

Έστω f μία συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[0, 2]$ για την οποία ισχύει:

$$\int_0^2 (t - 2)f(t) dt = 0$$

Ορίζουμε τις συναρτήσεις:

$$H(x) = \int_0^x t f(t) dt, \quad x \in [0, 2],$$

$$G(x) = \begin{cases} \frac{H(x)}{x} - \int_0^x f(t) dt + 3, & x \in (0, 2] \\ 6 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1 - t^2}}{t^2}, & x = 0 \end{cases}$$

α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση G είναι συνεχής στο διάστημα $[0, 2]$.

Μονάδες 5

β. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση G είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0, 2)$ και ότι ισχύει:

$$G'(x) = -\frac{H(x)}{x^2}, \quad 0 < x < 2$$

Μονάδες 6

γ. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένας αριθμός $\alpha \in (0, 2)$ τέτοιος ώστε να ισχύει $H(\alpha) = 0$.

Μονάδες 7

δ. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένας αριθμός $\zeta \in (0, \alpha)$ τέτοιος ώστε να ισχύει:

$$a \int_0^{\zeta} t f(t) dt = \zeta^2 \int_0^a f(t) dt$$

Μονάδες 7

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ & ΕΠΑ.Λ. Β'

20 ΜΑΪΟΥ 2009

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1^ο

A. Θεωρία - Θεώρημα σελίδα 251 σχολ. βιβλίου.

B. Θεωρία - Ορισμός σελίδα 213 σχολ. βιβλίου.

Γ.

α	β	γ	δ	ϵ
Σ	Σ	Λ	Λ	Λ

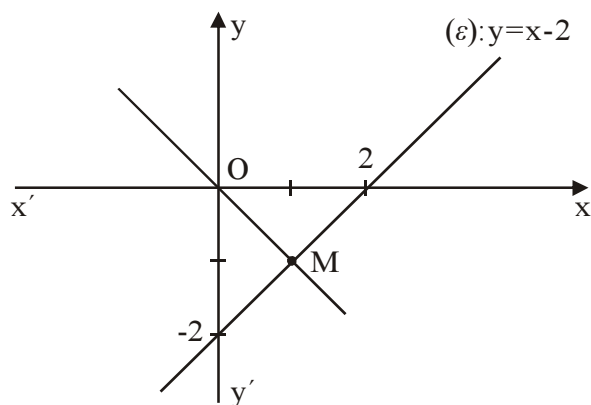
ΘΕΜΑ 2^ο

A. α. Έστω $z = x + yi$ και $M(x,y)$ η εικόνα του. Τότε $x + yi = (2\lambda + 1) + (2\lambda - 1)i$.

Άρα $x = 2\lambda + 1$ και $y = 2\lambda - 1$. Έτσι όμως $y - x = -2 \Leftrightarrow y = x - 2$.

Δηλαδή οι εικόνες των μιγαδικών z βρίσκονται στην ευθεία $(\epsilon) : y = x - 2$.

β. Ο μιγαδικός z_0 με το μικρότερο μέτρο έχει εικόνα το σημείο M για το οποίο είναι $OM \perp (\epsilon)$.



Αφού $OM \perp (\epsilon) \Rightarrow \lambda_{OM} \cdot \lambda_{\epsilon} = -1 \Rightarrow \lambda_{OM} \cdot 1 = -1 \Rightarrow \lambda_{OM} = -1$.

Άρα η εξίσωση της OM είναι : $y = -x$.

Οι συντεταγμένες του M (σημείου τομής των OM, ε) προκύπτουν από τη λύση του συστήματος των εξισώσεων $y = -x, y = x - 2$.

Επομένως $M: \begin{cases} y = -x \\ y = x - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ -x = x - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 \\ x = 1 \end{cases}$. Άρα $M(1, -1)$ και $z_0 = 1 - i$.

*Παρατήρηση 1: Η λύση αυτή είναι η «δημοφιλέστερη» και σίγουρα πιο ευνόητη από τους περισσότερους μαθητές. Και βέβαια όποιοι μαθητές έδωσαν έτσι την λύση δικαιούνται όλες τις μονάδες του ερωτήματος.

Εν τούτοις στερείται της απόλυτης μαθηματικής αυστηρότητας διότι από το πρώτο ερώτημα δεν είναι βέβαιο ότι ο μιγαδικός $z_0 = 1 - i$ ανήκει στο σύνολο των θεωρούμενων μιγαδικών.

Δεν έχει αποδειχθεί ότι η ευθεία $y=x-2$ είναι ο γεωμετρικός τόπος του συνόλου των εικόνων των μιγαδικών αυτών αλλά ότι το σύνολο των εικόνων τους είναι υποσύνολο των σημείων της ευθείας. Αυτό είναι το νόημα της πρότασης «βρίσκονται στην ευθεία».

Και δεν έχει αποδειχθεί διότι η ευθεία $y=x-2$ προέκυψε από την απαλοιφή του λ από τις $x = 2\lambda + 1$ και $y = 2\lambda - 1$. Όμως η απαλοιφή αυτή δεν είναι αντιστρεπτή διότι δεν διατηρείται η ισοδυναμία. Κάθε σημείο βέβαια της ευθείας $y=x-2$ είναι πράγματι και εικόνα ενός μιγαδικού της μορφής $z = (2\lambda + 1) + (2\lambda - 1)i$, $\lambda \in \mathbb{R}$ διότι υπάρχει για κάθε $x \in \mathbb{R}$ μοναδικός λ ώστε

$2\lambda+1=x$ και $2\lambda-1 = x-2$ ($=y$) και είναι ο $\lambda = \frac{x-1}{2}$. Όμως αυτό δεν έχει αποδειχθεί.

Έτσι ο μιγαδικός $1-i$ είναι όντως ο ζητούμενος μιγαδικός με την ελάχιστη απόσταση εικόνας από την αρχή των αξόνων διότι υπάρχει λ ώστε $2\lambda+1=1$ και $2\lambda-1=-1$ και είναι ο $\lambda=0$.

Η προσθήκη της τελευταίας υπογραμμισμένης πρότασης ολοκληρώνει την αυστηρότητα της απάντησης αλλά θα θεωρήσουμε άδικο να περιμένουμε από μαθητές τέτοια αυστηρότητα.

*Παρατήρηση 2: Εκτός της απάντησης αυτής υπάρχουν αυστηρότερες απαντήσεις που είναι καθαρά αλγεβρικές η και αναλυτικές. (Δεν επικαλούνται γεωμετρικό σχήμα).

Ενδεικτικά: Στο ερώτημα ουσιαστικά ζητείται το ελάχιστο της παράστασης:

$|z| = \sqrt{(2\lambda + 1)^2 + (2\lambda - 1)^2} = \sqrt{8\lambda^2 + 2}$. Η ελάχιστη τιμή αυτής της παράστασης είναι $\sqrt{2}$ αφού $8\lambda^2 + 2 \geq 2$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, άρα και $\sqrt{8\lambda^2 + 2} \geq \sqrt{2}$, με την ισότητα να ισχύει όταν $\lambda=0$, οπότε ο ζητούμενος μιγαδικός είναι ο $z_0 = (2 \cdot 0 + 1) + (2 \cdot 0 - 1)i = 1 - i$.

B. Έστω $w = x + yi$, με $x, y \in \mathbb{R}$. Η εξίσωση $|w|^2 + \bar{w} - 12 = z_0$

γράφεται $x^2 + y^2 + x - yi - 12 = 1 - i \Leftrightarrow x^2 + y^2 + x - 12 - yi = 1 - i \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + x - 12 = 1$ και $y = 1 \Leftrightarrow x^2 + x - 12 = 0$ και $y = 1 \Leftrightarrow (x = -4 \text{ ή } x = 3)$ και $y = 1$.

Άρα $w = -4 + i$ ή $w = 3 + i$.

ΘΕΜΑ 3ο

A. Ισχύει ότι $f(x) \geq 1$ για κάθε $x > -1$. Δηλαδή $a^x - \ln(x+1) \geq 1$ για κάθε $x > -1$.

Όμως $f(0) = 1$, οπότε $f(x) \geq f(0)$ για κάθε $x > -1$.

Επομένως η f παρουσιάζει στη θέση $x = 0$ (ολικό, άρα και τοπικό) ελάχιστο το $f(0) = 1$.

Ακόμη η f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(-1, +\infty)$ ως διαφορά παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

Άρα σύμφωνα με το θεώρημα Fermat είναι $f'(0) = 0$.

Όμως $f'(x) = a^x \ln a - \frac{1}{x+1}$, οπότε $f'(0) = 0 \Leftrightarrow \ln a = 1 \Leftrightarrow a = e$.

B.

α. Για $a = e$ είναι $f(x) = e^x - \ln(x+1)$.

Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα $(-1, +\infty)$ με $f'(x) = e^x - \frac{1}{x+1}$ και

$$f''(x) = \left(e^x - \frac{1}{x+1} \right)' = e^x + \frac{1}{(x+1)^2} > 0 \text{ για κάθε } x \in (-1, +\infty).$$

Άρα η f είναι κυρτή.

β. Αφού η f είναι κυρτή στο $(-1, \infty)$ προκύπτει ότι η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(-1, \infty)$, με προφανή ρίζα $x=0$ που είναι και μοναδική αφού η f' είναι γνησίως αύξουσα.

Έτσι αν $-1 < x < 0 \Rightarrow f'(x) < f'(0) = 0$, ενώ αν $x > 0 \Rightarrow f'(x) > f'(0) = 0$.

Δηλαδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-1, 0]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0, +\infty)$.

γ. Η δοσμένη εξίσωση ισοδύναμα γράφεται: $\frac{(f(\beta) - 1)(x - 2) + (f(\gamma) - 1)(x - 1)}{(x - 1)(x - 2)} = 0$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = (f(\beta) - 1)(x - 2) + (f(\gamma) - 1)(x - 1)$, με $x \in [1, 2]$.

Η g είναι συνεχής στο \mathbf{R} ως πολυωνυμική άρα και στο $[1, 2]$.

- $g(1) = -(f(\beta) - 1) = 1 - f(\beta) = f(0) - f(\beta) < 0$ διότι $f(0)$ ολικό ελάχιστο της f και $\beta \neq 0$,
- $g(2) = f(\gamma) - 1 = f(\gamma) - f(0) > 0$, επίσης διότι $f(0)$ ολικό ελάχιστο της f και $\gamma \neq 0$.

*(Πιο αναλυτικά είναι $f(0) - f(\beta) < 0$ διότι :

Αν $\beta \in (-1, 0)$ επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό ισχύει:

$$-1 < \beta < 0 \Rightarrow f(\beta) > f(0) \Rightarrow f(0) - f(\beta) < 0$$

Αν $\beta \in (0, +\infty)$, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό ισχύει:

$$0 < \beta \Leftrightarrow f(0) > f(\beta).$$

Ομοίως προκύπτει $f(\gamma) - f(0) > 0$.

Άρα $g(1) \cdot g(2) < 0$, οπότε λόγω του θεωρήματος Bolzano υπάρχει $x_0 \in (1, 2)$ ώστε

$$g(x_0) = 0 \Leftrightarrow (f(\beta) - 1)(x_0 - 2) + (f(\gamma) - 1)(x_0 - 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(f(\beta) - 1)(x_0 - 2) + (f(0) - 1)(x_0 - 1)}{(x_0 - 1)(x_0 - 2)} = 0.$$

Άρα η δοσμένη εξίσωση έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(1, 2)$.

*Παρατήρηση : Θέτοντας χάριν συντομίας $f(\beta) - 1 = \kappa > 0$ και $f(\gamma) - 1 = \lambda > 0$ θα μπορούσαν να δοθούν και οι παρακάτω λύσεις:

α) Η συνάρτηση $h(x) = \frac{\kappa}{x-1} + \frac{\lambda}{x-2}$ με πεδίο ορισμού το $(1,2)$ έχει όρια $+\infty$ και $-\infty$ αντίστοιχα

όταν $x \rightarrow 1^+$ και $x \rightarrow 2^-$ ενώ αποδεικνύεται πολύ εύκολα ότι είναι και γνησίως φθίνουσα στο

$(1,2)$, διότι $h(x) = -\left(\frac{\kappa}{(x-1)^2} + \frac{\lambda}{(x-2)^2}\right) < 0$ για κάθε $x \in (1, 2)$, άρα έχει σύνολο τιμών το

$(\lim_{x \rightarrow 2^-} h(x), \lim_{x \rightarrow 1^+} h(x)) = (-\infty, +\infty)$ και άρα το μηδέν περιέχεται στο σύνολο τιμών της δηλαδή

η h έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(1,2)$.

Επίσης εναλλακτικά από το ότι η h έχει όρια $+\infty$ και $-\infty$ αντίστοιχα όταν $x \rightarrow 1^+$ και $x \rightarrow 2^-$, προκύπτει ότι υπάρχουν αριθμοί γ, δ ώστε $1 < \gamma < \delta < 2$ με $f(\gamma) > 0$ και $f(\delta) < 0$ οπότε λόγω του θεωρήματος Bolzano στο διάστημα (γ, δ) υπάρχει ρίζα της εξίσωσης $h(x) = 0$.

β) Αλγεβρική λύση:

$$\text{Θέτοντας } \frac{\kappa}{x-1} + \frac{\lambda}{x-2} = 0, x \in (1, 2) \text{ προκύπτει } \frac{\kappa(x-2) + \lambda(x-1)}{(x-1)(x-2)} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\kappa(x-2) + \lambda(x-1) = 0 \Leftrightarrow (\kappa + \lambda)x = 2\kappa + \lambda \Leftrightarrow x = \frac{2\kappa + \lambda}{\kappa + \lambda}.$$

Η τιμή αυτή είναι αποδεκτή ως ρίζα της εξίσωσης αφού

$$1 = \frac{\kappa + \lambda}{\kappa + \lambda} < \frac{2\kappa + \lambda}{\kappa + \lambda} < \frac{2\kappa + 2\lambda}{\kappa + \lambda} = 2 \text{ (και είναι μάλιστα μοναδική ρίζα).}$$

ΘΕΜΑ 4^ο

α) Η f συνεχής στο $[0, 2]$ άρα και η $tf(t)$ είναι συνεχής στο $[0, 2]$.

Επομένως η συνάρτηση $H(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $[0, 2]$, άρα είναι και συνεχής.

Η συνάρτηση $\int_0^x f(t) dt$ είναι παραγωγίσιμη στο $[0, 2]$ αφού η f είναι συνεχής στο $[0, 2]$.

Άρα η G είναι συνεχής στο $(0, 2]$ ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων.

Εξετάζουμε τη συνέχεια της συνάρτησης G στη θέση $x_0 = 0$.

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{H(x)}{x} - \int_0^x f(t) dt + 3 \right) = 0 - 0 + 3 = 3, \text{ διότι:}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{H(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x tf(t) dt \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}}{x} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\int_0^x tf(t) dt)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{xf(x)}{1} = 0 \cdot f(0) = 0.$$

(είναι $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$, αφού η f είναι συνεχής στο $[0, 2]$, και $\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_0^x tf(t) dt = \int_0^0 tf(t) dt = 0$ διότι

η συνάρτηση $tf(t)$ είναι συνεχής, άρα η $\int_0^x tf(t) dt$ παραγωγίσιμη άρα και συνεχής.

$$\text{Επίσης } G(0) = 6 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1-t^2}}{t^2} = 6 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(1 - \sqrt{1-t^2})(1 + \sqrt{1-t^2})}{t^2(1 + \sqrt{1-t^2})} =$$

$$= 6 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - 1 + t^2}{t^2(1 + \sqrt{1-t^2})} = 6 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2}{t^2(1 + \sqrt{1-t^2})} = 6 \cdot \frac{1}{2} = 3.$$

Οπότε $\lim_{x \rightarrow 0^+} G(x) = G(0) = 3$.

Άρα η συνάρτηση G είναι συνεχής και στο $x_0 = 0$.

Επομένως η G είναι συνεχής στο $[0, 2]$.

β. Στο διάστημα $(0, 2)$ είναι:

- η συνάρτηση H παραγωγίσιμη αφού η f είναι συνεχής, με $H'(x) = x f(x)$.
- η συνάρτηση x παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική με $(x)' = 1$.

Άρα και η συνάρτηση $\frac{H(x)}{x}$ είναι παραγωγίσιμη ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων με:

$$\left(\frac{H(x)}{x}\right)' = \frac{H'(x) \cdot x - H(x)(x)'}{x^2} = \frac{x \cdot f(x) \cdot x - \int_0^x t \cdot f(t) dt}{x^2} = f(x) - \frac{\int_0^x t \cdot f(t) dt}{x^2}.$$

Επίσης στο ίδιο διάστημα, αφού η f είναι συνεχής συνάρτηση θα είναι παραγωγίσιμη και η συνάρτηση $\int_0^x f(t) dt$ με $\left(\int_0^x f(t) dt\right)' = f(x)$.

Άρα η συνάρτηση G είναι παραγωγίσιμη ως διαφορά παραγωγίσιμων συναρτήσεων με:

$$G'(x) = f(x) - \frac{\int_0^x t f(t) dt}{x^2} - f(x) = -\frac{H(x)}{x^2}, \quad 0 < x < 2.$$

γ. Η συνάρτηση G είναι συνεχής στο $[0, 2]$ και παραγωγίσιμη στο $(0, 2)$, με $G(0) = 3$ (από το β ερώτημα).

$$\text{Βρίσκουμε την τιμή της } G \text{ στη θέση } x = 2: \quad G(2) = \frac{H(2)}{2} - \int_0^2 f(t) dt + 3 \quad (1).$$

Όμως

$$\int_0^2 (t-2)f(t) dt = 0 \Rightarrow \int_0^2 t f(t) dt - 2 \int_0^2 f(t) dt = 0 \Rightarrow \int_0^2 t f(t) dt = 2 \int_0^2 f(t) dt \Rightarrow H(2) = 2 \int_0^2 f(t) dt.$$

Έτσι λόγω της (1) είναι

$$G(2) = \frac{2 \int_0^2 f(t) dt}{2} - \int_0^2 f(t) dt + 3 = 3 = G(0).$$

Ισχύουν επομένως για τη συνάρτηση G οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[0, 2]$, άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\alpha \in (0, 2)$ τέτοιο ώστε $G'(\alpha) = 0$.

Όμως από β ερώτημα $G'(\alpha) = -\frac{H(\alpha)}{\alpha^2}$.

Άρα είναι $H(\alpha) = 0$.

δ. Η συνάρτηση G είναι συνεχής στο $[0, \alpha]$ και παραγωγίσιμη στο $(0, \alpha)$. Άρα ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής.

Επομένως υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0, \alpha)$:

$$G'(\xi) = \frac{G(\alpha) - G(0)}{\alpha - 0} \Leftrightarrow -\frac{H(\xi)}{\xi^2} = \frac{\frac{H(\alpha)}{\alpha} - \int_0^\alpha f(t)dt + 3 - 3_{H(\alpha)=0}}{\alpha} \Leftrightarrow$$

$$-\frac{\int_0^\xi tf(t)dt}{\xi^2} = -\frac{\int_0^\alpha f(t)dt}{\alpha} \Leftrightarrow \alpha \int_0^\xi tf(t)dt = \xi^2 \int_0^\alpha f(t)dt.$$

***β' τρόπος:**

Αρκεί να δειχθεί ότι υπάρχει ρίζα στο $(0, \alpha)$, με $\alpha \in (0, 2)$ για την εξίσωση:

$$\alpha \int_0^x tf(t)dt = x^2 \cdot \int_0^\alpha f(t)dt \Leftrightarrow \alpha H(x) = x^2 \int_0^\alpha f(t)dt \Leftrightarrow -\frac{H(x)}{x^2} = -\frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha f(t)dt \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow G'(x) + \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha f(t)dt = 0 \Leftrightarrow (G(x) + \frac{x}{\alpha} \int_0^\alpha f(t)dt)' = 0 \quad (1).$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $P(x) = G(x) + \frac{x}{\alpha} \int_0^\alpha f(t)dt$ (αρχική της $G'(x) + \frac{x}{\alpha} \int_0^\alpha f(t)dt$), για την

οποία έχουμε :

α) είναι συνεχής στο $[0, \alpha]$ ως άθροισμα της συνεχούς G (από το α' ερώτημα) και της

πολυωνυμικής $(\frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha f(t)dt)x$.

β) είναι παραγωγίσιμη στο $(0, \alpha)$ ως άθροισμα της παραγωγίσιμης G (από το β' ερώτημα) και

της πολυωνυμικής $(\frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha f(t)dt)x$, με $P'(x) = G'(x) + \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha f(t)dt$.

γ) $P(0)=P(\alpha)=3$ διότι

$$P(0) = G(0) + 0 = 3 \text{ και}$$

$$P(\alpha) = G(\alpha) + \int_0^{\alpha} f(t)dt = \frac{H(\alpha)}{\alpha} - \int_0^{\alpha} f(t)dt + 3 + \int_0^{\alpha} f(t)dt = \frac{H(\alpha)}{\alpha} + 3 = \frac{0}{\alpha} + 3 = 3.$$

Έτσι ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle και άρα υπάρχει $\xi \in (0, \alpha)$ ώστε

$$P'(\xi) = 0 \Leftrightarrow G'(\xi) + \frac{1}{\alpha} \int_0^{\alpha} f(t)dt = 0, \text{ δηλαδή αποδείχθηκε ότι η εξίσωση (1) έχει ρίζα } \xi \in (0, \alpha).$$