

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΤΕΕ
2006

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Δίνονται 5 παρατηρήσεις μιας ποσοτικής μεταβλητής X :

$$16, 14, 22, 18, 20 + \alpha, \quad \text{όπου } \alpha \in \mathfrak{R}.$$

Αν ο συντελεστής μεταβλητότητας (CV) των παρατηρήσεων αυτών είναι 20% και η τυπική απόκλιση τους (s) είναι 4, τότε:

α) Να δείξετε ότι η μέση τιμή των παρατηρήσεων είναι $\bar{x} = 20$.

Μονάδες 7

β) Να υπολογίσετε την τιμή του πραγματικού αριθμού α .

Μονάδες 10

γ) Για την τιμή του α που υπολογίσατε στο ερώτημα β, να βρείτε τη διάμεσο του δείγματος.

Μονάδες 5

δ) Είναι το δείγμα ομοιογενές ή όχι και γιατί.

Μονάδες 3

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = 4x^3 - 12x + 2006, \quad x \in \mathfrak{R}.$$

α) Να βρεθεί η παράγουσα της f .

Μονάδες 8

β) Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της f για κάθε $x \in \mathfrak{R}$.

Μονάδες 8

γ) Να εξεταστεί η συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 3ο

Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί και συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2} \cdot \alpha, & \text{αν } x > 2 \\ 4, & \text{αν } x = 2 \\ \alpha x + \beta, & \text{αν } x < 2 \end{cases}$$

α) Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$

Μονάδες 8

β) Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$

Μονάδες 5

γ) Να υπολογίσετε τα α, β ώστε η f να είναι συνεχής στο $x_0 = 2$.

Μονάδες 8

δ) Για τις τιμές των α και β που βρήκατε στο ερώτημα γ, να υπολογίσετε τις τιμές $f(0)$ και $f(3)$.

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ 4ο

Μια βιοτεχνία, μεταξύ άλλων, κατασκευάζει κεραμικά πλακίδια σε σχήμα τριγώνου. Σε κάθε πλακίδιο το άθροισμα της βάσης x και του ύψους που αντιστοιχεί στη βάση αυτή είναι σταθερό και ισούται με 50cm.

α) Να δείξετε ότι το εμβαδό E της επιφάνειας κάθε τριγωνικού πλακιδίου δίνεται συναρτήσει του x από τον τύπο

$$E(x) = \frac{1}{2} x(50 - x), \quad 0 < x < 50.$$

Μονάδες 8

β) Για ποια τιμή του x το εμβαδό $E(x)$ γίνεται μέγιστο.

Μονάδες 12

γ) Να υπολογίσετε τη μέγιστη τιμή του $E(x)$.

Μονάδες 5

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

α) Είναι $CV = \frac{s}{\bar{x}} \Leftrightarrow \bar{x} = \frac{s}{CV}$. Οπότε $\bar{x} = \frac{4}{0,2} = 20$.

β) $\bar{x} = 20 \Leftrightarrow \frac{16 + 14 + 22 + 18 + 20 + \alpha}{5} = 20 \Leftrightarrow \frac{90 + \alpha}{5} = 20 \Leftrightarrow \alpha = 10$.

γ) Για $\alpha = 10$, οι παρατηρήσεις διατεταγμένες σε αύξουσα σειρά είναι:

14, 16, 18, 22, 30.

Επειδή το πλήθος τους είναι 5, διάμεσος είναι η 3η παρατήρηση. Έτσι $\delta = 18$.

δ) Ο συντελεστής μεταβλητότητας $CV = 20\%$ είναι μεγαλύτερος από 10%, άρα το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

ΘΕΜΑ 2ο

α) Η παράγουσα της $f(x) = 4x^3 - 12x + 2006$ είναι

$$F(x) = x^4 - 6x^2 + 2006x + C \text{ με } C \in \mathbb{R}.$$


β) Ο ρυθμός μεταβολής της f για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f'(x) = 12x^2 - 12$.

γ) Εξισώνουμε την $f'(x)$ με το μηδέν και βρίσκουμε

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 12x^2 - 12 = 0 \Leftrightarrow 12(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow 12(x - 1)(x + 1) = 0$$

οπότε $x = 1$ ή $x = -1$.

Κατασκευάζουμε πίνακα μεταβολών

| | | | | | |
|----|--|----|---|-----------|---|
| x | $-\infty$ | -1 | 1 | $+\infty$ | |
| f' | + | 0 | - | 0 | + |
| f |  | | | | |

Επομένως η f είναι

- γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty, -1]$
- γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[-1, 1]$
- γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[1, +\infty)$.

ΘΕΜΑ 3ο

α) Είναι

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \left[\frac{x^2 - 4}{x - 2} \cdot \alpha \right] = \alpha \cdot \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \alpha \cdot \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x - 2)(x + 2)}{(x - 2)} = \\ &= \alpha \lim_{x \rightarrow 2^+} (x + 2) = 4\alpha.\end{aligned}$$

β) Είναι $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (\alpha x + \beta) = 2\alpha + \beta$.

γ) Η f είναι συνεχής στο $x_0 = 2$ αν και μόνο αν $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2)$.

Δηλαδή $2\alpha + \beta = 4\alpha = 4$ οπότε

$$\left. \begin{array}{l} 2\alpha + \beta = 4 \\ 4\alpha = 4 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2\alpha + \beta = 4 \\ \alpha = 1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2\alpha + \beta = 4 \\ \alpha = 1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \beta = 2 \\ \alpha = 1 \end{array} \right\}.$$

δ) Για τις τιμές $\alpha = 1$ και $\beta = 2$ ο τύπος της f γράφεται:

$$\begin{aligned}f(x) &= \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2} \cdot 1 & \text{αν } x > 2 \\ 4 & \text{αν } x = 2 \\ x + 2 & \text{αν } x < 2 \end{cases} = \begin{cases} \frac{(x - 2)(x + 2)}{(x - 2)} \cdot 1 & \text{αν } x > 2 \\ 4 & \text{αν } x = 2 \\ x + 2 & \text{αν } x < 2 \end{cases} = \\ &= \begin{cases} (x + 2) & \text{αν } x \in (-\infty, 2) \cup (2, +\infty) \\ 4 & \text{αν } x = 2. \end{cases}\end{aligned}$$

Οπότε

$$f(0) = (0 + 2) = 2 \text{ και}$$

$$f(3) = (3 + 2) = 5.$$

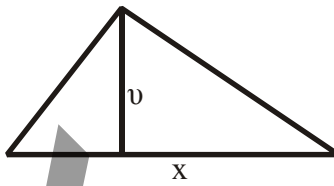
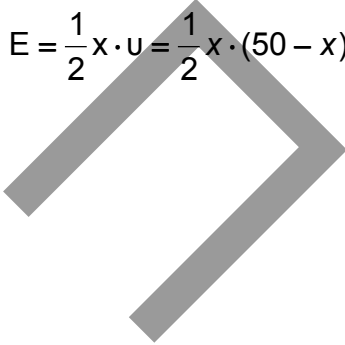
ΘΕΜΑ 4ο

α) Επειδή το άθροισμα της βάσης x και του αντίστοιχου ύψους u είναι σταθερό και ίσο με 50cm έχουμε:

$$u + x = 50.$$

Επομένως το εμβαδόν του τριγώνου είναι

$$E = \frac{1}{2}x \cdot u = \frac{1}{2}x \cdot (50 - x) \quad \text{με} \quad 0 < x < 50.$$



β) Είναι $E'(x) = \left[\frac{1}{2}(50x - x^2) \right]' = \frac{1}{2}(50 - 2x) = 25 - x.$

Λύνουμε την εξίσωση: $E'(x) = 0 \Leftrightarrow 25 - x = 0$ και βρίσκουμε $x = 25$ cm.

Κατασκευάζουμε πίνακα μεταβολών.

| | | | |
|----|---|----|----|
| x | 0 | 25 | 50 |
| E' | | + | - |
| E | | ↗ | ↘ |

Η τιμή λοιπόν για την οποία το εμβαδόν $E(x)$ παρουσιάζει μέγιστο είναι η $x = 25$.

γ) Για την τιμή $x = 25$ η μέγιστη τιμή του εμβαδού είναι:

$$E(25) = \frac{1}{2} \cdot 25 \cdot (50 - 25) = \frac{1}{2} \cdot 25 \cdot 25 = \frac{625}{2} \text{ cm}^2.$$