

# ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

## ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

2011

### ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

#### ΘΕΜΑ Α

**A1.** Έστω μια συνάρτηση  $f$  ορισμένη σε ένα διάστημα  $\Delta$  και  $x_0$  ένα εσωτερικό σημείο του  $\Delta$ . Αν η  $f$  παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο  $x_0$  και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, να αποδείξετε ότι:  $f'(x_0) = 0$

**Μονάδες 10**

**A2.** Δίνεται συνάρτηση  $f$  ορισμένη στο  $\mathbb{R}$ . Πότε η ευθεία  $y = \lambda x + \beta$  λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της  $f$  στο  $+\infty$ ;

**Μονάδες 5**

**A3.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

**α)** Για κάθε μιγαδικό αριθμό  $z \neq 0$  ορίζουμε  $z^0 = 1$ .

**β)** Μια συνάρτηση  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  λέγεται συνάρτηση 1-1, όταν για οποιαδήποτε  $x_1, x_2 \in A$  ισχύει η συνεπαγωγή: αν  $x_1 \neq x_2$ , τότε  $f(x_1) \neq f(x_2)$ .

**γ)** Για κάθε  $x \in \mathbb{R}_1 = \mathbb{R} - \{x | \sin x = 0\}$  ισχύει:  $(\epsilon\phi x)' = \frac{1}{\sin^2 x}$ .

**δ)** Ισχύει ότι:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu x}{x} = 1$ .

**ε)** Οι γραφικές παραστάσεις  $C$  και  $C'$  των συναρτήσεων  $f$  και  $f^{-1}$  είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία  $y = x$  που διχοτομεί τις γωνίες  $xOy$  και  $x'Oy'$ .

**Μονάδες 10**

#### ΘΕΜΑ Β

Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί  $z$  και  $w$  με  $z \neq 3i$ , οι οποίοι ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$|z - 3i| + |\bar{z} + 3i| = 2 \quad \text{και} \quad w = z - 3i + \frac{1}{z - 3i}$$

**B1.** Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών  $z$ .

**Μονάδες 7**

**B2.** Να αποδείξετε ότι  $\bar{z} + 3i = \frac{1}{z - 3i}$ .

**Μονάδες 4**

**B3.** Να αποδείξετε ότι ο  $w$  είναι πραγματικός αριθμός και ότι  $-2 \leq w \leq 2$ .

**Μονάδες 8**

**B4.** Να αποδείξετε ότι:  $|z - w| = |z|$

**Μονάδες 6**

## ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , δύο φορές παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$ , με  $f'(0) = f(0) = 0$ , η οποία ικανοποιεί τη σχέση:

$$e^x (f'(x) + f''(x) - 1) = f'(x) + x f''(x)$$

για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

**Γ1.** Να αποδείξετε ότι:  $f(x) = \ln(e^x - x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

**Μονάδες 8**

**Γ2.** Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

**Μονάδες 3**

**Γ3.** Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της  $f$  έχει ακριβώς δύο σημεία καμψής.

**Μονάδες 7**

**Γ4.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $\ln(e^x - x) = \sin x$  έχει ακριβώς μία λύση στο διάστημα  $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ .

**Μονάδες 7**

## ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , οι οποίες για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  ικανοποιούν τις σχέσεις:

**i)**  $f(x) > 0$  και  $g(x) > 0$

**ii)**  $\frac{1-f(x)}{e^{2x}} = \int_0^{-x} \frac{e^{2t}}{g(x+t)} dt$

**iii)**  $\frac{1-g(x)}{e^{2x}} = \int_0^x \frac{e^{2t}}{f(x+t)} dt$

**Δ1.** Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις  $f$  και  $g$  είναι παραγωγίσιμες στο  $\mathbb{R}$  και ότι  $f(x) = g(x)$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

**Μονάδες 9**

**Δ2.** Να αποδείξετε ότι:  $f(x) = e^x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

**Μονάδες 4**

**Δ3.** Να υπολογίσετε το όριο:  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln f(x)}{f\left(\frac{1}{x}\right)}$ .

**Μονάδες 5**

**Δ4.** Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$F(x) = \int_1^x f(t^2) dt$$

τους άξονες  $x'x$  και  $y'y$  και την ευθεία με εξίσωση  $x = 1$ .

**Μονάδες 7**

## ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

### ΘΕΜΑ Α

**A1.** Θεωρία (θεώρημα Fermat) σχολικό βιβλίο, σελ. 260-261.

**A2.** Θεωρία (ορισμός) σχολικό βιβλίο, σελ. 280.

**A3.**

$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	$\delta$	$\varepsilon$
$\Sigma$	$\Sigma$	$\Lambda$	$\Lambda$	$\Sigma$

### ΘΕΜΑ Β

**B1.** Έχουμε από υπόθεση ότι:

$$|z - 3i| + |\bar{z} + 3i| = 2 \quad (1)$$

$$\text{Όμως } |\bar{z} + 3i| = |\overline{\bar{z} + 3i}| = |z - 3i| \quad (2)$$

Οπότε από τις (1) και (2) προκύπτει ότι:

$$|z - 3i| + |z - 3i| = 2 \Leftrightarrow 2|z - 3i| = 2 \Leftrightarrow |z - 3i| = 1 \quad (3).$$

Αν  $z = x + yi$  η (3) γράφεται:  $|x + (y - 3)i| = 1 \Leftrightarrow x^2 + (y - 3)^2 = 1$

Επομένως ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των  $z$  είναι κύκλος με κέντρο το σημείο  $K(0, 3)$  και ακτίνα  $\rho = 1$ .

**B2.** Από το ερώτημα B1 έχουμε:  $|z - 3i| = 1$

$$\text{Οπότε } |z - 3i|^2 = 1 \Leftrightarrow (z - 3i) \cdot \overline{(z - 3i)} = 1 \Leftrightarrow (z - 3i) \cdot (\bar{z} + 3i) = 1 \Leftrightarrow \bar{z} + 3i = \frac{1}{z - 3i}.$$

**B3.** Σύμφωνα με την προηγούμενη ισότητα ο  $w$  γράφεται

$$w = z - 3i + \frac{1}{z - 3i} = z - 3i + \bar{z} + 3i = z + \bar{z} = 2\operatorname{Re}(z) \in \mathbb{R}.$$

Όμως από τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των  $z$  έχουμε ότι:  $x^2 \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$ .

Και επειδή  $x = \operatorname{Re}(z)$  προκύπτει ότι:  $-1 \leq \operatorname{Re}(z) \leq 1$ .

Οπότε:  $-2 \leq 2\operatorname{Re}(z) \leq 2$ . Άρα  $-2 \leq w \leq 2$ .

**B4.** Είναι:  $|z - w| = \left| z - z + 3i - \frac{1}{z - 3i} \right| = \left| 3i - \frac{1}{z - 3i} \right| = |3i - \bar{z} - 3i| = |-\bar{z}| = |z|.$

**ΘΕΜΑ Γ**

**Γ1.** Η δοσμένη σχέση γράφεται:

$$(e^x)' \cdot f'(x) + e^x \cdot f''(x) - (e^x)' = (x \cdot f'(x))' \Leftrightarrow$$

$$(e^x \cdot f'(x) - e^x)' = (x \cdot f'(x))' \Leftrightarrow e^x \cdot f'(x) - e^x = x \cdot f'(x) + c_1, \quad c_1 \in \mathbb{R}$$

Για  $x = 0$  προκύπτει:  $e^0 \cdot f'(0) - e^0 = 0 \cdot f'(0) + c_1$

και λόγω των δεδομένων αρχικών συνθηκών είναι  $c_1 = -1$ .

Η τελευταία σχέση έτσι γράφεται:

$$e^x \cdot f'(x) - e^x = x \cdot f'(x) - 1 \Leftrightarrow f'(x)(e^x - x) = e^x - 1 \Leftrightarrow f'(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f'(x) = \left[ \ln(e^x - x) \right]' \Leftrightarrow f(x) = \ln(e^x - x) + c_2.$$

Για  $x = 0$  προκύπτει  $c_2 = 0$ .

Έτσι  $f(x) = \ln(e^x - x)$ .

(\*) Αν θέσουμε  $h(x) = e^x - x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , είναι:  $h'(x) = e^x - 1$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow e^x = e^0 \stackrel{e^x \uparrow -1}{\Leftrightarrow} x = 0.$$

$$h'(x) > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow e^x > e^0 \stackrel{e^x \uparrow}{\Leftrightarrow} x > 0.$$

$$h'(x) < 0 \Leftrightarrow e^x < 1 \Leftrightarrow e^x < e^0 \stackrel{e^x \uparrow}{\Leftrightarrow} x < 0.$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
h'	-	0	+
h			

Έτσι η  $h$  έχει ολικό ελάχιστο στη θέση  $x = 0$  την τιμή  $h(0) = e^0 - 0 = 1$ .

Δηλαδή  $h(x) \geq 1 > 0$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

**Γ2.** Είναι  $f'(x) = \left[ \ln(e^x - x) \right]' = \frac{e^x - 1}{e^x - x}$ .

Λόγω της παρατήρησης (\*) του ερωτήματος Γ1 οι ρίζες και το πρόσημο, συνεπώς ο πίνακας μεταβολών της  $f$  εξαρτάται μόνον από τις ρίζες και το πρόσημο του αριθμητικού  $h'(x) = e^x - 1$ .

Συνεπώς  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ .

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 0.$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x < 0.$$

Άρα η  $f$  είναι: γνησίως φθίνουσα στο  $(-\infty, 0]$ , γνησίως αύξουσα στο  $[0, +\infty)$   
 και παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στη θέση  $x = 0$  την τιμή  $f(0) = \ln(e^0 - 0) = \ln 1 = 0$ .

**Γ3.** Είναι:  $f''(x) = \left(\frac{e^x - 1}{e^x - x}\right)' = \frac{(e^x - 1)'(e^x - x) - (e^x - 1)(e^x - x)'}{(e^x - x)^2} =$

$$= \frac{e^x(e^x - x) - (e^x - 1)(e^x - 1)}{(e^x - x)^2} = \frac{e^x(e^x - x) - (e^x - 1)^2}{(e^x - x)^2} =$$

$$= \frac{e^{2x} - xe^x - (e^{2x} - 2e^x + 1)}{(e^x - x)^2} = \frac{(2-x)e^x - 1}{(e^x - x)^2}.$$

Θέτουμε  $\varphi(x) = (2-x)e^x - 1$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

Είναι:

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= -e^x + (2-x) \cdot e^x = e^x(1-x) \\ \varphi'(x) &= 0 \Leftrightarrow x = 1 \\ \varphi'(x) &> 0 \Leftrightarrow x < 1 \\ \varphi'(x) &< 0 \Leftrightarrow x > 1 \end{aligned}$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$\Phi'$	+	0	-
$\Phi$			

Προκύπτει ότι η  $\varphi$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $(-\infty, 1]$ , γνησίως φθίνουσα στο  $[1, +\infty)$  και έχει ολικό μέγιστο  $\varphi(1) = e - 1 > 0$ .

Βρίσκουμε τώρα τα όρια της  $\varphi$  στα  $-\infty, +\infty$ :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [(2-x) \cdot e^x - 1] = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (2-x) \cdot e^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2-x}{e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(2-x)'}{(e^{-x})'} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{-e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{e^{-x}} = 0$$

Έτσι  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x) = -1$ .

Λόγω της συνέχειας και της μονοτονίας της  $\varphi$  είναι

$$\varphi((-\infty, 1]) = \left( \lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x), \varphi(1) \right] = (-1, e-1].$$

$$\varphi([1, +\infty)) = \left( \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x), \varphi(1) \right] = (-\infty, e-1].$$

Παρατηρούμε ότι:

- $0 \in \varphi((-\infty, 1])$  άρα υπάρχει  $x_1 \in (-\infty, 1]$  ώστε  $\varphi(x_1) = 0$ .

Εν τω μεταξύ η  $\varphi$  είναι γνησίως αύξουσα, άρα εκατέρωθεν του  $x_1$  αλλάζει πρόσημο. Διότι με  $x < x_1$  είναι  $\varphi(x) < \varphi(x_1) \Leftrightarrow \varphi(x) < 0$

Ενώ με  $1 > x > x_1$  είναι  $\varphi(x) > \varphi(x_1) \Leftrightarrow \varphi(x) > 0$ .

Έτσι ισοδύναμα (επειδή  $(e^x - x)^2 > 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ ) η  $f''$  έχει μία μόνο ρίζα στο  $(-\infty, 1]$ , εκατέρωθεν της οποίας αλλάζει πρόσημο.

- Όμοια τώρα  $0 \in \varphi([1, +\infty))$  άρα υπάρχει  $x_2 \in [1, +\infty)$ , ώστε  $\varphi(x_2) = 0$ . Εν τω μεταξύ η  $\varphi$  είναι γνησίως φθίνουσα άρα εκατέρωθεν του  $x_2$  αλλάζει πρόσημο.

Διότι με  $1 < x < x_2$  είναι  $\varphi(x) > \varphi(x_2) \Leftrightarrow \varphi(x) > 0$

Ενώ με  $x > x_2$  είναι  $\varphi(x) < \varphi(x_2) \Leftrightarrow \varphi(x) < 0$ .

Έτσι η  $f''$  έχει επίσης μία μόνο ρίζα  $x_2$  στο  $[1, +\infty)$ , εκατέρωθεν της οποίας αλλάζει πρόσημο. Άρα τελικά, η  $f$  έχει ακριβώς δύο σημεία καμπής στις θέσεις  $x_1, x_2$ .

**Γ4.** Θέτουμε  $g(x) = \ln(e^x - x) - \sin x = f(x) - \sin x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

- Ύπαρξη : Η  $g$  είναι συνεχής ως διαφορά συνεχών στο  $\mathbb{R}$ , άρα και στο  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ .

Είναι  $g(0) = f(0) - \sin(0) = -1 < 0$

$$g\left(\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin\frac{\pi}{2} = f\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

Όμως  $f \uparrow$  στο  $[0, +\infty)$ , άρα είναι  $\frac{\pi}{2} > 0 \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right) > f(0) \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right) > 0$ .

Έτσι  $g(0) \cdot g\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0$ , οπότε λόγω του Θ. Bolzano η  $g$  έχει μία ρίζα στο διάστημα  $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ .

- Μοναδικότητα:

Θα δείξουμε ότι η  $g$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ , οπότε η ρίζα θα είναι μοναδική.

Έστω  $x_1, x_2 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  με  $x_1 < x_2$  τότε

$f(x_1) < f(x_2)$  διότι  $f \uparrow$  στο  $[0, +\infty)$

$\sin x_1 > \sin x_2$  διότι  $\sin x \downarrow$  στο  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

Άρα  $-\sin x_1 < -\sin x_2$ .

Έτσι όμως  $f(x_2) - \sin x_1 < f(x_2) - \sin x_2$ , άρα  $g(x_1) < g(x_2)$ .

Άρα  $g$  γνησίως αύξουσα στο  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ .

**Παρατήρηση (2<sup>ος</sup> τρόπος για τη μονοτονία):**

Η μονοτονία της  $g$  στο  $[0, \pi/2]$  μπορεί να προκύψει και ως εξής:  $g'(x) = f'(x) + \eta\mu x$ .

Όμως  $f'(x) > 0$ , για κάθε  $x \in (0, +\infty)$  άρα και για κάθε  $x \in (0, \pi/2)$ ,

ενώ επίσης  $\eta\mu x > 0$  για κάθε  $x \in (0, \pi/2)$ .

Άρα  $g'(x) > 0$  για κάθε  $x \in (0, \pi/2)$  και επομένως  $g$  γνησίως αύξουσα στο  $[0, \pi/2]$ .

**ΘΕΜΑ Δ**

**Δ1.** Έχουμε ότι:

$$\frac{1-f(x)}{e^{2x}} = \int_0^{-x} \frac{e^{2t}}{g(x+t)} dt$$

Θέτουμε:  $x+t=u \Leftrightarrow t=u-x$ . Οπότε:  $dt=du$ .

Ακόμη για  $t=0$  έχουμε  $u=x$  και για  $t=-x$  έχουμε  $u=0$ .

Επομένως:

$$\frac{1-f(x)}{e^{2x}} = \int_x^0 \frac{e^{2u-2x}}{g(u)} du = \int_x^0 e^{-2x} \frac{e^{2u}}{g(u)} du = e^{-2x} \int_x^0 \frac{e^{2u}}{g(u)} du \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1-f(x) = -e^{2x} e^{-2x} \int_0^x \frac{e^{2u}}{g(u)} du \Leftrightarrow 1-f(x) = -\int_0^x \frac{e^{2u}}{g(u)} du$$

$$\text{Άρα } f(x) = 1 + \int_0^x \frac{e^{2u}}{g(u)} du \quad (1)$$

Με ανάλογο τρόπο προκύπτει ότι:

$$g(x) = 1 + \int_0^x \frac{e^{2u}}{f(u)} du \quad (2)$$

Επειδή οι συναρτήσεις  $\frac{e^{2u}}{g(u)}$  και  $\frac{e^{2u}}{f(u)}$  είναι συνεχείς στο  $[0, x]$  με  $x \in \mathbb{R}$

συμπεραίνουμε ότι οι συναρτήσεις  $\int_0^x \frac{e^{2u}}{g(u)} du$  και  $\int_0^x \frac{e^{2u}}{f(u)} du$  είναι παραγωγίσιμες

στο  $\mathbb{R}$ , επομένως και οι συναρτήσεις  $f$  και  $g$  είναι παραγωγίσιμες στο  $\mathbb{R}$ .

$$f'(x) = \frac{e^{2x}}{g(x)} \quad \text{και} \quad g'(x) = \frac{e^{2x}}{f(x)}$$

$$\text{οπότε } f'(x)g(x) = e^{2x} \quad \text{και} \quad g'(x)f(x) = e^{2x}$$

άρα

$$f'(x)g(x) = g'(x)f(x) \Leftrightarrow f'(x)g(x) - g'(x)f(x) = 0 \stackrel{g(x)>0}{\Rightarrow}$$

$$\Leftrightarrow \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g^2(x)} = 0 \Leftrightarrow \left( \frac{f(x)}{g(x)} \right)' = 0.$$

Από την τελευταία προκύπτει ότι:  $\frac{f(x)}{g(x)} = c$

και επειδή  $f(0) = g(0) \stackrel{(1)\&(2)}{=} 1$ , θα είναι  $c = 1$ .

Άρα  $f(x) = g(x)$ .

**Δ2.** Επειδή είναι:

$$f'(x) = \frac{e^{2x}}{f(x)} \Leftrightarrow \text{(Ερώτημα Δ1)}$$

$$f'(x)f(x) = e^{2x} \Leftrightarrow 2f'(x)f(x) = 2e^{2x} \Leftrightarrow (f^2(x))' = (e^{2x})'$$

Σύμφωνα με γνωστό θεώρημα (συνέπεια του Θ.Μ.Τ.) έχουμε:

$$f^2(x) = e^{2x} + c$$

Όμως  $f(0) = 1$ , οπότε  $c = 0$ .

$$\text{Άρα } f^2(x) = e^{2x} \Leftrightarrow [f(x)]^2 = [e^x]^2 \Leftrightarrow |f(x)| = e^x$$

Και επειδή  $f(x) > 0$ , προκύπτει ότι  $f(x) = e^x$ .

**Δ3.** Είναι

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln f(x)}{f\left(\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln e^x}{e^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{e^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( x \cdot e^{-\frac{1}{x}} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} = (De L'Hospital) (*)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x}} \cdot \left(\frac{1}{x^2}\right)}{\left(-\frac{1}{x^2}\right)} = - \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-\frac{1}{x}} = -\infty.$$

$$(*) : \text{Θέτουμε } \frac{1}{x} = y \text{ οπότε το } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{e^{-y}}{y} : \frac{+\infty}{-\infty}.$$

**Δ4.** Είναι  $F'(x) = f(x^2) > 0$ . Άρα η  $F \uparrow$  στο  $[0, 1]$ .

Άρα για  $0 \leq x \leq 1$  θα είναι  $F(x) \leq F(1)$  και επειδή  $F(1) = 0$ , προκύπτει ότι  $F(x) \leq 0$   $\forall x \in [0, 1]$ .

Επομένως  $\forall x \in [0, 1]$ , θα είναι:

$$E = - \int_0^1 F(x) dx = - \int_0^1 x' F(x) dx = - [x F(x)]_0^1 + \int_0^1 x F'(x) dx =$$

$$= -F(1) + \int_0^1 x \left( \int_1^x f(t^2) \right) dx = \int_0^1 x f(x^2) dx =$$

$$= \int_0^1 x e^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 2x e^{x^2} dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 (e^{x^2})' dx = \frac{1}{2} [e^{x^2}]_0^1 = \frac{1}{2} (e - 1) \text{ τ.μ.}$$