Θέματα Μαθηματικών
Θετικής Κατεύθυνσης
Β΄ Λυκείου 1999

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

Ζήτημα 1ο

Α. Έστω

$$\vec{a} = (x_1, y_1) \quad \text{και} \quad \vec{\beta} = (x_2, y_2)$$

δύο διανύσματα του καρτεσιανού επιπέδου Oxy.

α) Να εκφράσετε (χωρίς απόδειξη) το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ συναρτήσει των συντεταγμένων τους.

(Μονάδες 3)

β) Αν τα διανύσματα $\vec{a}$, $\vec{\beta}$ δεν είναι παράλληλα προς τον άξονα y΄y και λ_1, λ_2 είναι οι συντελεστές διεύθυνσης των $\vec{a}$, $\vec{\beta}$ αντιστοίχως, να αποδείξετε ότι:

$$\vec{a} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda_1 \lambda_2 = -1$$

(Μονάδες 5,5)

γ) Αν τα διανύσματα $\vec{a}$, $\vec{\beta}$ είναι μη μηδενικά και θ είναι η γωνία των $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$, να αποδείξετε ότι:

$$\text{συνθ} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$$

(Μονάδες 4)

Β. **α)** Δίνονται τα διανύσματα:

$$\vec{a}_1 = (\lambda, \lambda - 1),$$
$$\vec{\beta}_1 = (4, \lambda)$$

με $\lambda \neq 0$. Για ποια από τις παρακάτω τιμές του λ τα διανύσματα $\vec{a}_1$ και $\vec{\beta}_1$ είναι κάθετα;

Α. λ = 1
Β. λ = 3
Γ. λ = 2
Δ. λ = -2
Ε. λ = -3

Να γράψετε στο τετραδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

(Μονάδες 6,5)

β) Δίνονται τα διανύσματα:

$$\vec{u} = (1, -\sqrt{3}),$$
$$\vec{v} = (2, 2\sqrt{3}),$$
$$\vec{w} = (\sqrt{3}, 1)$$

Να αντιστοιχίσετε κάθε γωνία που βρίσκεται στη στήλη Α΄με το μέτρο της που βρίσκεται στη στήλη Β΄.

ΣΤΗΛΗ Α΄	ΣΤΗΛΗ Β΄
	Α. $\pi/2$
1. γωνία των $\vec{u}$ και $\vec{v}$	Β. $\pi/6$
	Γ. $\pi/4$
2. γωνία των $\vec{u}$ και $\vec{w}$	Δ. $2\pi/3$
	Ε. $3\pi/4$
3. γωνία των $\vec{v}$ και $\vec{w}$	Ζ. $\pi/3$

Να γράψετε στο τετραδιό σας τον αριθμό της στήλης Α΄και δίπλα το γράμμα της στήλης Β΄που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

(Μονάδες 6)

Ζήτημα 2ο

Δίνονται οι αριθμοί α = 2κ + 2 και β = 6κ + 7, όπου κ ακέραιος αριθμός. Να αποδείξετε ότι:

α) Οι αριθμοί 3α και β είναι πρώτοι μεταξύ τους.

(Μονάδες 9)

β) Το υπόλοιπο της διαίρεσης του αριθμού (2β – α) με το 10 είναι 2.

(Μονάδες 8)

γ) Αν ο αριθμός κ είναι πολλαπλάσιο του 7, τότε ο αριθμός (α + β – 2) είναι πολλαπλάσιο του 7.

(Μονάδες 8)

Ζήτημα 3ο

Δίνονται τα σημεία Α(8, 0) και Β(0, 4) του καρτεσιανού επιπέδου Oxy.

α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που ορίζεται από την αρχή των αξόνων Ο και το μέσο Δ του τμήματος ΑΒ.

(Μονάδες 9)

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε) που διέρχεται από το σημείο Δ και είναι κάθετη στην ευθεία ΟΔ.

(Μονάδες 9)

γ) Έστω Μ τυχαίο σημείο της παραπάνω ευθείας (ε). Να δείξετε ότι ισχύει η σχέση:

$$\overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 = 2\overrightarrow{OM}^2$$

(Μονάδες 7)

Ζήτημα 4ο

Θεωρούμε έναν πληθυσμό από 1999 μυρμήγκια. Κάθε μυρμήγκι χαρακτηρίζεται από έναν αριθμό
$n = 1, 2, 3, \ldots, 1999$ και κινείται επάνω στο καρτεσιανό επίπεδο Oxy διαγράφοντας μια τροχιά με εξίσωση:

$$(x - 1)^2 + y^2 = 2n(x + y - 1).$$

Να δείξετε ότι:

α) η τροχιά κάθε μυρμηγκιού είναι κύκλος και να βρεθούν οι συντεταγμένες του κέντρου του.

(Μονάδες 9)

β) κατά την κίνησή τους όλα τα μυρμήγκια διέρχονται από ένα σταθερό σημείο Α (που είναι η φωλιά τους). Ποιες είναι οι συντεταγμένες του σημείου Α;

(Μονάδες 8)

γ) οι τροχιές όλων των μυρμηγκιών εφάπτονται της ευθείας $x + y - 1 = 0$ στο σημείο Α.

(Μονάδες 8)

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Ζήτημα 1ο

Α. α) Το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων:

$$\vec{\alpha} = (x_1, y_1) \quad , \quad \vec{\beta} = (x_2, y_2)$$

είναι:

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = x_1 x_2 + y_1 y_2$$

β) Ισχύει:

$$\lambda_1 = y_1/x_1 \text{ και } \lambda_2 = y_2/x_2$$

με $x_1 \neq 0$, $x_2 \neq 0$, αφού τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ δεν είναι παράλληλα προς τον άξονα $y'y$. Είναι:

$$\vec{\alpha} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0 \Leftrightarrow x_1 x_2 + y_1 y_2 = 0 \Leftrightarrow \frac{x_1 x_2}{x_1 x_2} + \frac{y_1 y_2}{x_1 x_2} = 0 \Leftrightarrow 1 + \frac{y_1}{x_1} \cdot \frac{y_2}{x_2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 + \lambda_1 \lambda_2 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 \lambda_2 = -1$$

γ) Ισχύει:

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}| \sigma\upsilon\nu\theta \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\theta = \frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}}{|\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|} \quad (1)$$

Όμως:

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = x_1 x_2 + y_1 y_2$$

και

$$|\vec{\alpha}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} \quad , \quad |\vec{\beta}| = \sqrt{x_2^2 + y_2^2}$$

Επομένως, η (1) γράφεται:

$$\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$$

Β. α) Τα διανύσματα $\vec{\alpha}_1$ και $\vec{\beta}_1$ είναι κάθετα αν και μόνο αν:

$$\vec{\alpha}_1 \cdot \vec{\beta}_1 = 0 \Leftrightarrow \lambda \cdot 4 + (\lambda - 1) \cdot \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda(4 + \lambda - 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda\ (\lambda + 3) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0 \text{ (απορ.) ή } \lambda = -3$$

Επομένως, σωστή απάντηση είναι η Ε.

β) Είναι:

$$|\vec{u}| = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{3})^2} = 4$$

$$|\vec{w}| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$$

Τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{u}$ και $\vec{v}$ υπολογίζουμε ως εξής:

$$συν\left(\vec{u},\hat{\ }\vec{v}\right) = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|} = \frac{1\cdot 2 + \left(-\sqrt{3}\right)\cdot 2\sqrt{3}}{2\cdot 4} = \frac{-4}{8} = -\frac{1}{2}$$

Άρα:

$$\left(\vec{u},\hat{\ }\vec{v}\right) = \frac{2\pi}{3}$$

Τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{u}$ και $\vec{w}$ υπολογίζουμε ως εξής:

$$συν\left(\vec{u},\hat{\ }\vec{w}\right) = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{w}|} = \frac{1\cdot\sqrt{3} + \left(-\sqrt{3}\right)1}{2\cdot 2} = \frac{0}{4} = 0$$

Άρα:

$$\left(\vec{u},\hat{\ }\vec{w}\right) = \frac{\pi}{2}$$

Τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{v}$ και $\vec{w}$ υπολογίζουμε ως εξής:

$$συν\left(\vec{v},\hat{\ }\vec{w}\right) = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|\cdot|\vec{w}|} = \frac{2\sqrt{3} + 2\sqrt{3}\cdot 1}{4\cdot 2} = \frac{4\sqrt{3}}{4\cdot 2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Άρα:

$$\left(\vec{v},\hat{\ }\vec{w}\right) = \frac{\pi}{6}$$

Επομένως, οι σωστές αντιστοιχίες είναι:

1 $\leftrightarrow$ Δ   2 $\leftrightarrow$ Α   3 $\leftrightarrow$ Β.

Ζήτημα 2ο

α) Έχουμε: α = 2κ + 2, β = 6κ + 7, με κ $\in Z$

Έστω δ = (3α, β) $\Leftrightarrow$ δ = (6κ + 6, 6κ + 7). Τότε:

$$\left.\begin{matrix} δ \mid 6κ+6 \\ δ \mid 6κ+7 \end{matrix}\right\}$$

Οπότε:

δ/(6κ + 7) − (6κ + 6) $\Leftrightarrow$ δ/1, δηλαδή δ = 1.

Άρα, οι αριθμοί 3α και β είναι πρώτοι μεταξύ τους.

β) Έχουμε:

2β − α = 2(6κ + 7) − (2κ + 2) = 12κ + 14 − 2κ − 2 = 10κ + 12 =

= 10κ + 10 + 2 = 10(κ + 1) + 2.

Άρα: 2β – α = 10(κ + 1) + 2

Άρα το υπόλοιπο της διαίρεσης του αριθμού (2β – α) με το 10 είναι 2.

γ) Ισχύει: κ = πολ.7, δηλαδή κ = 7λ, με $\lambda \in \mathbb{Z}$. Έχουμε:

α + β – 2 = 2κ + 2 + 6κ + 7 – 2 = 8κ + 7 = 8(7λ) + 7 = 7(8λ + 1)

Άρα: α + β – 2 = 7(8λ + 1)

Αν θέσουμε: 8λ + 1 = μ, με $\mu \in \mathbb{Z}$, τότε:

α + β – 2 = 7μ = πολ.7

Ζήτημα 3ο

α) Επειδή το σημείο Δ είναι το μέσον του τμήματος ΑΒ, έχουμε:

$$\left.\begin{aligned} x_\Delta &= \frac{x_A + x_B}{2} \\ y_\Delta &= \frac{y_A + y_B}{2} \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \begin{aligned} x_\Delta &= \frac{8+0}{2} = 4 \\ y_\Delta &= \frac{0+4}{2} = 2 \end{aligned}$$

Δηλαδή: Δ(4, 2)

Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας ΟΔ θα είναι:

$$\lambda_{O\Delta} = \frac{y_\Delta - y_O}{x_\Delta - x_O} = \frac{2-0}{4-0} = \frac{1}{2}$$

Επειδή το σημείο Ο(0, 0) είναι σημείο της ευθείας ΟΔ, η εξίσωσή της θα είναι:

$y - 0 = \lambda_{O\Delta} (x - 0) \Leftrightarrow y = 1/2\ x$

β) Αν λ_ε ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας (ε), τότε:

$(\varepsilon) \perp O\Delta \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon \bullet \lambda_{O\Delta} = -1 \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon \bullet 1/2 = -1 \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon = -2$

Επειδή το σημείο Δ(4, 2) είναι σημείο της ευθείας (ε), η εξίσωσή της θα είναι:

$y - y_\Delta = \lambda_\varepsilon (x - x_\Delta) \Leftrightarrow y - 2 = -2\ (x - 4) \Leftrightarrow y + 2x - 10 = 0$

γ) Θεωρούμε το τυχαίο σημείο $M(x_0, y_0)$ της ευθείας (ε). Σύμφωνα με το ερώτημα β) ισχύει:

$$2x_0 + y_0 - 10 = 0 \qquad (1)$$

Πρέπει:

$$\overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 = 2\overrightarrow{OM}^2 \Leftrightarrow \left|\overrightarrow{MA}\right|^2 + \left|\overrightarrow{MB}\right|^2 = 2\left|\overrightarrow{OM}\right|^2 \Leftrightarrow$$

$$\left(\sqrt{(x_0-8)^2 + y_0^2}\right)^2 + \left(\sqrt{x_0^2 + (y_0-4)^2}\right)^2 = 2\left(\sqrt{x_0^2 + y_0^2}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$x_0^2 - 16x_0 + 64 + y_0^2 + x_0^2 + y_0^2 - 8y_0 + 16 = 2x_0^2 + 2y_0^2 \Leftrightarrow$$

$- 16x_0 - 8y_0 + 80 = 0 \Leftrightarrow - 8(2x_0 + y_0 - 10) = 0 \Leftrightarrow 2x_0 + y_0 - 10 = 0$

Η τελευταία ισχύει, λόγω της (1).

Ζήτημα 4ο

Ισχύει ότι:

$$(x-1)^2 + y^2 = 2n(x+y-1),\ n = 1, 2, 3, \dots, 1999 \qquad (1)$$

α) Έχουμε:

$$(x-1)^2 + y^2 = 2n(x+y-1) \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2nx - 2ny + 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2(n+1)x - 2ny + 1 + 2n = 0 \qquad (2)$$

Θέτουμε:

$$-2(n+1) = A,\ -2n = B \text{ και } 1 + 2n = \Gamma.$$

Για να είναι η (2), άρα και η ισοδύναμή της (1), εξίσωση κύκλου, πρέπει:

$$A^2 + B^2 - 4\Gamma > 0 \Leftrightarrow 4(n+1)^2 + 4n^2 - 4(1+2n) > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (n+1)^2 + n^2 - (1+2n) > 0 \Leftrightarrow n^2 + 2n + 1 + n^2 - 1 - 2n > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2n^2 > 0 \text{ που ισχύει για κάθε } n = 1, 2, 3, \dots, 1999$$

Επομένως, η (2) είναι εξίσωση κύκλου με κέντρο:

$$K\left(-\frac{A}{2} = n+1,\ -\frac{B}{2} = n\right)$$

και ακτίνα:

$$\rho = \sqrt{2n^2} = n\sqrt{2}$$

β) Έστω Α (x_0, y_0) το σταθερό σημείο που ζητούμε. Το σημείο Α πρέπει να είναι σημείο του κύκλου C. Δηλαδή, πρέπει:

$$x_0^2 + y_0^2 - 2(n+1)x_0 - 2ny_0 + 1 + 2n = 0 \Leftrightarrow (x_0-1)^2 + y_0^2 = 2n(x_0 + y_0 - 1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2(x_0 + y_0 - 1)n + (x_0^2 - y_0^2 + 2x_0 - 1) = 0 \qquad (3)$$

Για να ισχύει η (3) για κάθε n = 1, 2, 3, …, 1999, πρέπει:

$$\left.\begin{aligned} 2(x_0 + y_0 - 1) &= 0 \\ -x_0^2 - y_0^2 + 2x_0 - 1 &= 0 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{aligned} x_0 + y_0 - 1 &= 0 \\ x_0^2 - 2x_0 + 1 + y_0^2 &= 0 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{aligned} x_0 + y_0 - 1 &= 0 \\ (x_0-1)^2 + y_0^2 &= 0 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = 0 \end{cases}$$

Επομένως, το σημείο Α(1, 0) είναι το ζητούμενο σταθερό σημείο.

γ) Έστω ε :x + y − 1 = 0 και d(K, ε) η απόσταση του κέντρου Κ του κύκλου C από την ευθεία (ε). Έχουμε:

$$d(K,\varepsilon)=\frac{|1+n+n-1|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{|2n|}{\sqrt{2}}=\frac{2n}{\sqrt{2}}=n\sqrt{2}=e$$

Επομένως, οι τροχιές των μυρμηγκιών εφάπτονται της ευθείας (ε) και μάλιστα στο σημείο Α, αφού:

1 + 0 − 1 = 0, που ισχύει.