

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

- A1.** Θεωρία, σελ. 31 σχολ. βιβλίου.
A2. Θεωρία, σελ. 148 σχολ. βιβλίου.
A3. Θεωρία, σελ. 96 σχολ. βιβλίου.
A4. α) Λ, β) Σ, γ) Λ, δ) Σ, ε) Σ.

ΘΕΜΑ Β

B1. Αφού η διάμεσος αντιστοιχεί στο 50% των παρατηρήσεων, από το ιστόγραμμα αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων θα είναι $\delta = 25$.

B2. Αφού η διάμεσος αντιστοιχεί στο 50% και είναι $\delta = 25$ θα είναι

$$\alpha + 4 + 3\alpha - 6 = 2\alpha + 8 + \alpha - 2 \Leftrightarrow \alpha + 3\alpha - 2\alpha - \alpha = -4 + 6 + 8 - 2 \Leftrightarrow \alpha = 8.$$

Άρα ο πίνακας συχνοτήτων της κατανομής των χρόνων θα είναι

χρόνος (λεπτά)	x_i	v_i	$f_i\%$	N_i	$F_i\%$
[5-15)	10	12	20	12	20
[15-25)	20	18	30	30	50
[25-35)	30	24	40	54	90
[35-45)	40	6	10	60	100
Σύνολο		60	100		

B3.

$$\text{Είναι } \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^4 v_i x_i}{v} = \frac{10 \cdot 12 + 20 \cdot 18 + 30 \cdot 24 + 40 \cdot 6}{60} = \frac{1440}{60} = 24 \text{ λεπτά.}$$

$$\text{Επίσης } S^2 = \frac{\sum_{i=1}^4 v_i (x_i - \bar{x})^2}{v} = \frac{v_1 (x_1 - \bar{x})^2 + v_2 (x_2 - \bar{x})^2 + v_3 (x_3 - \bar{x})^2 + v_4 (x_4 - \bar{x})^2}{v} =$$

$$= \frac{12(10 - 24)^2 + 18(20 - 24)^2 + 24(30 - 24)^2 + 6(40 - 24)^2}{60} =$$

$$= \frac{12 \cdot 195 + 18 \cdot 16 + 24 \cdot 36 + 6 \cdot 256}{60} = \frac{5040}{60} = \frac{504}{6} = 84.$$

Άρα η τυπική απόκλιση είναι $S = \sqrt{s^2} = \sqrt{84} \approx 9,17$ λεπτά.

B4.

Από 35 έως 45 έχουμε το 10% των παρατηρήσεων και έστω $x\%$ το ποσοστό των παρατηρήσεων από 37 έως 45. Τότε θα είναι:

$$\frac{45-35}{45-37} = \frac{10}{x} \Leftrightarrow \frac{10}{8} = \frac{10}{x} \Leftrightarrow 10x = 80 \Leftrightarrow x = 8\%.$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Αν Γ και I είναι τα ενδεχόμενα ένας μαθητής να μαθαίνει αντίστοιχα Γαλλικά, Ισπανικά, τότε είναι:

$$\begin{aligned} P(\Gamma \cup I) &= \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2(\sqrt{x^2+3}-2)}{x^2+x} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2(\sqrt{x^2+3}-2)(\sqrt{x^2+3}+2)}{x(x+1)(\sqrt{x^2+3}+2)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2(x-1)(x+1)}{x(x+1)(\sqrt{x^2+3}+2)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2(x-1)}{x(\sqrt{x^2+3}+2)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2(x-1)}{x(\sqrt{x^2+3}+2)} = 1. \end{aligned}$$

Άρα το ενδεχόμενο ο μαθητής να μαθαίνει τουλάχιστον μια από τις 2 γλώσσες είναι βέβαιο.

Γ2. Είναι $P(\Gamma) = \frac{3\nu}{\nu^2+1}$, $P(I) = \frac{\nu+2}{\nu^2+1}$, $P(\Gamma \cap I) = \frac{\nu+1}{\nu^2+1}$, $P(\Gamma \cup I) = 1$.

Όμως $P(\Gamma \cup I) = P(\Gamma) + P(I) - P(\Gamma \cap I)$, άρα:

$$1 = \frac{3\nu}{\nu^2+1} + \frac{\nu+2}{\nu^2+1} - \frac{\nu+1}{\nu^2+1} \Leftrightarrow \nu^2+1 = 3\nu + \nu + 2 - \nu - 1 \Leftrightarrow \nu^2 - 3\nu = 0 \Leftrightarrow \nu = 0 \text{ ή } \nu = 3.$$

Επειδή $\nu \geq 3$ προκύπτει $\nu = 3$.

Γ3. Το ενδεχόμενο ο μαθητής να μαθαίνει μόνο μία από τις δύο γλώσσες είναι το:
 $(\Gamma - I) \cup (I - \Gamma)$.

$$\text{Είναι } P((\Gamma - I) \cup (I - \Gamma)) = P(\Gamma) + P(I) - 2P(\Gamma \cap I) = \frac{9}{10} + \frac{5}{10} - 2 \cdot \frac{4}{10} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}.$$

Γ4. $P(\Gamma \cap I) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$. Όμως $P(\Gamma \cap I) = \frac{N(\Gamma \cap I)}{N(\Omega)}$.

$$\text{Έτσι } \frac{N(\Gamma \cap I)}{N(\Omega)} = \frac{2}{5} \Leftrightarrow \frac{32}{N(\Omega)} = \frac{2}{5} \Leftrightarrow N(\Omega) = 80.$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{1 + \ln^2 x}{x} \right)' = \frac{x \left(2 \frac{1}{x} \ln x \right) - 1 - \ln^2 x}{x^2} = \frac{2 \ln x - 1 - \ln^2 x}{x^2} = \\ &= -\frac{\ln^2 x - 2 \ln x + 1}{x^2} = -\frac{(\ln x - 1)^2}{x^2} \end{aligned}$$

Επειδή είναι $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (0, e) \cup (e, +\infty)$, $f'(e) = 0$, προκύπτει ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$.

Δ2. Το εμβαδόν του ορθογωνίου ΟΛΜΚ είναι: $E(x) = x \cdot f(x) = x \frac{1 + \ln^2 x}{x} = 1 + \ln^2 x$.

Η συνάρτηση $E(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με:

$$E'(x) = (1 + \ln^2 x)' = 2 \ln x (\ln x)' = \frac{2 \ln x}{x}.$$

$$E'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2 \ln x}{x} = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

x	0	1	$+\infty$	
$E'(x)$		-	0	+
$E(x)$		↘ ↗		

min

$E(1) = 1 \cdot \frac{1 + \ln^2 \cdot 1}{1} = 1$. Για την τιμή $x = 1$, έχουμε $f(1) = 1$, επομένως (ΟΛ) = (ΟΚ), οπότε το ορθογώνιο είναι τετράγωνο.

Δ3. Επειδή η ευθεία $\varepsilon: y = \lambda x + \beta$ είναι παράλληλη στην εφαπτόμενη της C_f στο σημείο $\Sigma(1, f(1))$, θα είναι: $\lambda = f'(1) = -1$.

Έτσι έχουμε: $y = -x + \beta$, με $\beta \neq 10$.

Επειδή η μέση τιμή των παρατηρήσεων x_i είναι $\bar{x} = 10$ και $y_i = (-1)x_i + \beta$ προκύπτει ότι:

$$\bar{y} = -10 + \beta \text{ και } S_y = |-1| \cdot S_x = 2.$$

Για να είναι το δείγμα των παρατηρήσεων y_i με $i = 1, 2, \dots, 10$ ομοιογενές θα πρέπει:

$$\frac{S_y}{|\bar{y}|} \leq 0,1.$$

$$\frac{S_y}{|\bar{y}|} \leq 0,1 \Leftrightarrow \frac{2}{|-\bar{x} + \beta|} \leq \frac{10}{100} \Leftrightarrow |-\bar{x} + \beta| \geq 20 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |-10 + \beta| \geq 20 \Leftrightarrow (-10 + \beta \leq -20 \text{ ή } -10 + \beta \geq 20) \Leftrightarrow \beta \leq -10 \text{ ή } \beta \geq 30.$$

Άρα: $\beta \in (-\infty, -10] \cup [30, +\infty)$.

Δ4.

- (i) $A \subseteq A \cup B$ άρα $P(A) \leq P(A \cup B)$ και επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα είναι $f(P(A)) \geq f(P(A \cup B))$ (1)
- (ii) $A \cap B \subseteq A \cup B$ άρα $P(A \cap B) \leq P(A \cup B)$ και επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα είναι $f(P(A \cap B)) \geq f(P(A \cup B))$ (2)

Προσθέτοντας τις σχέσεις (1) και (2) κατά μέλη έχουμε:
 $f(P(A)) + f(P(A \cap B)) \geq 2f(P(A \cup B))$.