

Θέματα Γεωμετρίας Γενικής Παιδείας Β' Λυκείου 2000

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

Ζήτημα 1ο

- A.1.** Σε κάθε τρίγωνο $AB\Gamma$ με διάμεσο AM να αποδείξετε ότι το άθροισμα των τετραγώνων δύο πλευρών του ισούται με το διπλάσιο του τετραγώνου της διαμέσου που περιέχεται μεταξύ των πλευρών αυτών, αυξημένο κατά το μισό του τετραγώνου της τρίτης πλευράς, δηλαδή:

$$\beta^2 + \gamma^2 = 2\mu_a^2 + \frac{\alpha^2}{2}$$

(Μονάδες 10)

- A.2.** Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$ να συμπληρώσετε τη σχέση:

$$A\Gamma^2 - AB^2 = \dots\dots\dots$$

ώστε να εκφράζει το δεύτερο θεώρημα των διαμέσων.

(Μονάδες 2,5)

- B.** Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση για καθένα από τα ερωτήματα B1 και B2.

- B1.** Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ δίνονται $\beta = 8$, $\gamma = 6$ και $\mu_a = 5$.
Η πλευρά a είναι ίση με:

- A. 7
- B. 4
- Γ. 10
- Δ. 9
- E. 11

(Μονάδες 6,5)

- B2.** Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ δίνονται $a = 4$, $\beta = 7$, $\gamma = 5$, $A\Delta$ το ύψος και AM η διάμεσος. Η προβολή ΔM της διαμέσου AM πάνω στην πλευρά a είναι ίση με:

- A. 4
- B. 8
- Γ. $8/3$
- Δ. 5
- E. 3

(Μονάδες 6)

Ζήτημα 2ο

Δίνεται ορθογώνιο τραπέζιο ΑΒΓΔ με $AB \parallel \Gamma\Delta$, $AB < \Gamma\Delta$ και $AB = 4$, $AD = 3$, $B\Gamma = 5$.

Να υπολογίσετε:

- α)** Την προβολή της ΒΓ πάνω στη ΔΓ. (Μονάδες 9)
- β)** Το εμβαδόν του τραπέζιου ΑΒΓΔ. (Μονάδες 9)
- γ)** Το εμβαδόν του τριγώνου ΔΒΓ. (Μονάδες 7)

Ζήτημα 3ο

Σε κύκλο (O,R) είναι εγγεγραμμένο ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρά $AB = 15$. Να υπολογίσετε:

- α)** Την ακτίνα R του κύκλου. (Μονάδες 6)
- β)** Το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου (O,R) . (Μονάδες 6)
- γ)** Το εμβαδόν του ισόπλευρου τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 6)
- δ)** Το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τον κύκλο και το ισόπλευρο τρίγωνο. (Μονάδες 7)

Ζήτημα 4ο

Δίνεται κύκλος (O,R) και μια διάμετρος του ΑΒ. Από ένα σημείο Μ του κύκλου, διαφορετικό των Α και Β, φέρνουμε κάθετη στη διάμετρο ΑΒ, που τέμνει τον κύκλο στο σημείο Ζ και τη διάμετρο στο σημείο Δ. Επί της ΑΒ θεωρούμε το ευθύγραμμο τμήμα $Ο\Gamma = Ο\Delta$ και φέρνουμε τη ΜΓ, που τέμνει τον κύκλο στο σημείο Ε. Να αποδείξετε ότι:

- α)** $M\Delta^2 = A\Delta \cdot \Delta B$. (Μονάδες 6)
- β)** $M\Gamma \cdot \Gamma E = M\Delta \cdot \Delta Z = R^2 - O\Delta^2$. (Μονάδες 6)
- γ)** $M\Gamma^2 + M\Delta^2 = 2(R^2 + O\Delta^2)$. (Μονάδες 5)
- δ)** $\frac{M\Gamma}{\Gamma E} + \frac{M\Delta}{\Delta Z} = \frac{2(R^2 + O\Delta^2)}{R^2 - O\Delta^2}$ (Μονάδες 8)

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

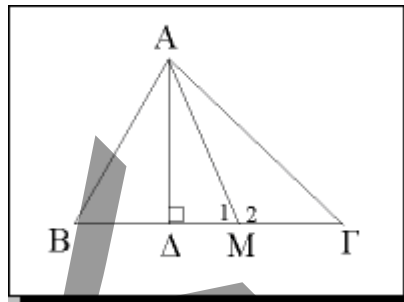
Ζήτημα 1ο

A.1.

α) Έστω $AB < AG$ και AM διάμεσος. Τα τρίγωνα ABM και $AMΓ$ έχουν: AM κοινή, $BM = MΓ$ και $AB < AG$, άρα:

$$\widehat{M}_1 < \widehat{M}_2$$

(αφού έχουν δύο πλευρές ίσες και τις τρίτες πλευρές άνισες, οι απέναντι γωνίες είναι ομοίως άνισες).



Όμως,

$$\widehat{M}_1 + \widehat{M}_2 = 180^\circ$$

άρα:

$$\widehat{M}_1 < 90^\circ \text{ και } \widehat{M}_2 > 90^\circ$$

Εφαρμόζουμε στο τρίγωνο ABM την γενίκευση του πυθαγορείου θεωρήματος για οξεία γωνία ($\widehat{M}_1 < 90^\circ$) και έχουμε:

$$AB^2 = AM^2 + BM^2 - 2BM \cdot \Delta M \quad (1)$$

Εφαρμόζουμε στο τρίγωνο $AMΓ$ την γενίκευση του πυθαγορείου θεωρήματος για αμβλεία γωνία ($\widehat{M}_2 > 90^\circ$) και έχουμε:

$$AG^2 = AM^2 + MΓ^2 + 2MΓ \cdot \Delta M \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) βρίσκουμε ότι:

$$AB^2 + AG^2 = 2AM^2 + BM^2 + MΓ^2 - 2BM \cdot \Delta M + 2MΓ \cdot \Delta M =$$

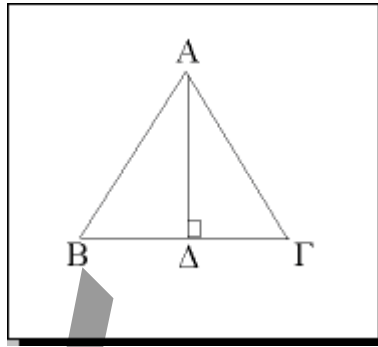
$$= 2AM^2 + \left(\frac{BΓ}{2}\right)^2 + \left(\frac{BΓ}{2}\right)^2 - 2BM \cdot \Delta M + 2BM \cdot \Delta M =$$

$$= 2AM^2 + 2\left(\frac{BΓ}{2}\right)^2 = 2AM^2 + 2\frac{BΓ^2}{4} = 2AM^2 + \frac{BΓ^2}{2}$$

Επομένως:

$$\beta^2 + \gamma^2 = 2\mu_a^2 + \frac{\alpha^2}{2}$$

- β)** Έστω $AB = AG$. Τότε το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές, οπότε η διάμεσος AD είναι ύψος και διχοτόμος. Αφού AD διάμεσος, τότε $BD = DG = B\Gamma/2$, κι επειδή AD ύψος, τότε το τρίγωνο ABD είναι ορθογώνιο, απ' όπου με Π.Θ. έχουμε:



$$AB^2 = AD^2 + BD^2 \Leftrightarrow 2AB^2 = 2(AD^2 + BD^2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow AB^2 + AG^2 = 2AD^2 + 2BD^2 \Leftrightarrow$$

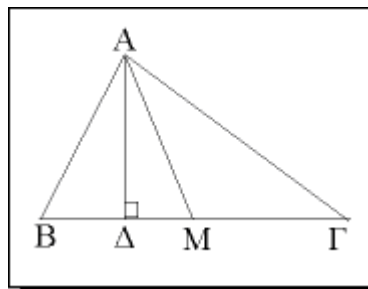
$$\Leftrightarrow AB^2 + AG^2 = 2AD^2 + 2\left(\frac{B\Gamma}{2}\right)^2 = 2AD^2 + 2\frac{B\Gamma^2}{4} = 2AD^2 + \frac{B\Gamma^2}{2}$$

Επομένως:

$$\beta^2 + \gamma^2 = 2\mu_a^2 + \frac{\alpha^2}{2}$$

- γ)** Ομοίως με το (α) αποδεικνύεται αν $AB > AG$.

- A.2.** Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < AG$, όπου AD ύψος και AM διάμεσος. Τότε από το δεύτερο θεώρημα διαμέσων έχουμε:



$$AG^2 - AB^2 = 2 \cdot B\Gamma \cdot DM.$$

- B.1.** Από το θεώρημα των διαμέσων γνωρίζουμε ότι:

$$\beta^2 + \gamma^2 = 2\mu_a^2 + \frac{a^2}{2}$$

κι επειδή έχουμε $\beta = 8$, $\gamma = 6$ και $\mu_a = 5$, βρίσκουμε:

$$8^2 + 6^2 = 2 \cdot 5^2 + \frac{a^2}{2} \Leftrightarrow 64 + 36 = 2 \cdot 25 + \frac{a^2}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 100 = 50 + \frac{a^2}{2} \Leftrightarrow \frac{a^2}{2} = 50 \Leftrightarrow a^2 = 100 \Leftrightarrow a = 10,$$

Επομένως σωστή απάντηση είναι η Γ.

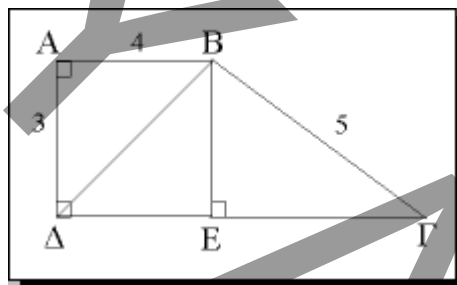
Β.2. Από το δεύτερο θεώρημα των διαμέσων, κι επειδή $\beta > \gamma$, $a = 4$, $\beta = 7$, $\gamma = 5$, βρίσκουμε:

$$\beta^2 - \gamma^2 = 2 \cdot a \cdot \Delta M \Leftrightarrow 7^2 - 5^2 = 2 \cdot 4 \cdot \Delta M \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 49 - 25 = 8 \cdot \Delta M \Leftrightarrow 24 = 8 \cdot \Delta M \Leftrightarrow \Delta M = 3,$$

Επομένως σωστή απάντηση είναι η Ε.

Ζήτημα 2ο



- α)** Φέρνουμε το ύψος ΒΕ, οπότε η προβολή της ΒΓ πάνω στη ΔΓ είναι το τμήμα ΓΕ. Επειδή το ΒΕ είναι ύψος (όπως και το ΑΔ), θα ισχύει: $BE = AD = 3$. Εφαρμόζουμε το πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΒΕΓ και βρίσκουμε ότι:

$$B\Gamma^2 = BE^2 + E\Gamma^2 \Leftrightarrow E\Gamma^2 = B\Gamma^2 - BE^2 \Leftrightarrow E\Gamma^2 = 5^2 - 3^2 \Leftrightarrow E\Gamma^2 = 16 \Leftrightarrow E\Gamma = 4.$$

- β)** Το τραπέζιο ΑΒΓΔ έχει μικρή βάση $AB = 4$, μεγάλη βάση $\Gamma\Delta = \Delta E + E\Gamma = 8$ και ύψος $A\Delta = 3$, άρα:

$$E_{AB\Gamma\Delta} = \frac{AB + \Gamma\Delta}{2} \cdot A\Delta = \frac{4 + 8}{2} \cdot 3 = 6 \cdot 3 = 18$$

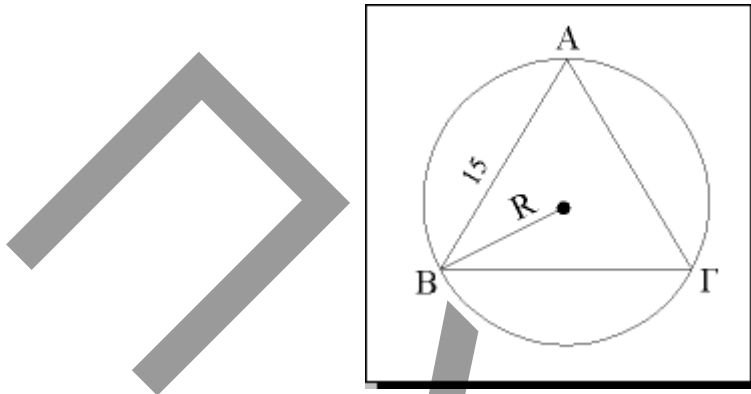
$E_{AB\Gamma\Delta} = 18$ τετρ. μονάδες.

- γ)** Το τρίγωνο ΔΒΓ έχει βάση $\Gamma\Delta = 8$ και ύψος $BE = 3$, οπότε:

$$E_{B\Gamma\Delta} = \frac{\Gamma\Delta \cdot BE}{2} = \frac{8 \cdot 3}{2} = 12$$

Άρα: $E_{B\Gamma\Delta} = 12$ τετρ. μονάδες.

Ζήτημα 3ο



α) Γνωρίζουμε από τη θεωρία ότι:

$$\lambda_3 = R\sqrt{3} \Leftrightarrow R = \frac{\lambda_3}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow R = \frac{\lambda_3}{3}\sqrt{3} \Leftrightarrow R = \frac{15}{3}\sqrt{3} \Leftrightarrow R = 5\sqrt{3} \text{ μονάδες.}$$

β) $E_{(O,R)} = \pi R^2 \Leftrightarrow E_{(O,R)} = \pi(5\sqrt{3})^2 \Leftrightarrow E_{(O,R)} = \pi \cdot 25 \cdot 3 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow E_{(O,R)} = 75\pi \text{ τετρ. μονάδες.}$$

γ) Γνωρίζουμε ότι ένα ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς a έχει εμβαδόν:

$$E = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

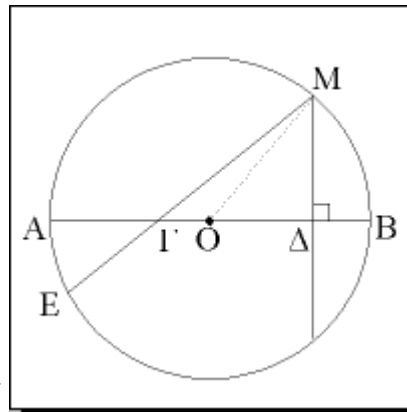
Οπότε για $a = AB = 15$, βρίσκουμε ότι:

$$E_{ABB} = \frac{15^2\sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow E_{ABB} = \frac{225\sqrt{3}}{4} \text{ τετρ. μονάδες}$$

δ) Το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τον κύκλο και το ισόπλευρο τρίγωνο είναι:

$$E = 75\pi - \frac{225\sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow E = \frac{300 - 225\sqrt{3}}{4} \text{ τετρ. μονάδες.}$$

Ζήτημα 4ο



- α)** Για τη χορδή ΜΖ το ΟΔ είναι απόστημα, άρα το Δ είναι το μέσο της χορδής ΜΖ και το Β είναι το μέσο του τόξου ΜΖ. Επίσης, οι ΜΖ, ΑΒ είναι χορδές του κύκλου (Ο, R) που τέμνονται στο Δ, επομένως:

$$ΑΔ \cdot ΔΒ = ΜΔ \cdot ΔΖ \Leftrightarrow ΑΔ \cdot ΔΒ = ΜΔ \cdot ΜΔ \Leftrightarrow ΑΔ \cdot ΔΒ = ΜΔ^2.$$

- β)** Το ΜΕ είναι χορδή του κύκλου και το Γ σημείο της χορδής ΜΕ (εσωτερικό του κύκλου), άρα:

$$ΜΓ \cdot ΓΕ = R^2 - ΟΓ^2.$$

Ομοίως το ΜΖ είναι χορδή του κύκλου και το Δ σημείο της χορδής ΜΖ (εσωτερικό του κύκλου), άρα:

$$ΜΔ \cdot ΔΖ = R^2 - ΟΓ^2.$$

Συνεπώς: $ΜΓ \cdot ΓΕ = ΜΔ \cdot ΔΖ = R^2 - ΟΓ^2$.

- γ)** Στο τρίγωνο ΜΓΔ το ΜΟ είναι διάμεσος οπότε από το 1^ο θεώρημα των διαμέσων βρίσκουμε ότι:

$$ΜΔ^2 + ΜΓ^2 = 2ΜΟ^2 + (1/2 ΓΔ^2) \Leftrightarrow ΜΔ^2 + ΜΓ^2 = 2R^2 + 1/2 (2ΟΔ)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow ΜΔ^2 + ΜΓ^2 = 2R^2 + 1/2 \cdot (4ΟΔ^2) \Leftrightarrow ΜΔ^2 + ΜΓ^2 = 2R^2 + 2ΟΔ^2.$$

- δ)** Επειδή $ΜΔ = ΔΖ$, $ΜΔ \cdot ΔΖ = R^2 - ΟΓ^2$ και $ΜΔ^2 + ΜΓ^2 = 2R^2 + 2ΟΔ^2$, η δοσμένη σχέση γράφεται ισοδύναμα:

$$\frac{ΜΓ}{ΓΕ} + \frac{ΜΔ}{ΔΖ} = \frac{2(R^2 + ΟΔ^2)}{R^2 - ΟΔ^2} \Leftrightarrow \frac{ΜΓ}{ΓΕ} + \frac{ΜΔ}{ΜΔ} = \frac{ΜΔ^2 + ΜΓ^2}{ΜΔ \cdot ΔΖ} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{ΜΓ}{ΜΕ} + 1 = \frac{ΜΔ^2 + ΜΓ^2}{ΜΔ^2} \Leftrightarrow \frac{ΜΓ}{ΓΕ} + 1 = \frac{ΜΔ^2}{ΜΔ^2} + \frac{ΜΓ^2}{ΜΔ^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{ΜΓ}{ΓΕ} + 1 = 1 + \frac{ΜΓ^2}{ΜΔ^2} \Leftrightarrow \frac{ΜΓ}{ΓΕ} = \frac{ΜΓ^2}{ΜΔ^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\Gamma\epsilon} = \frac{M\Gamma}{M\Delta^2} \Leftrightarrow M\Delta^2 = M\Gamma \cdot \Gamma\epsilon \Leftrightarrow M\Delta \cdot \Delta Z = M\Gamma \cdot \Gamma\epsilon$$

Η τελευταία σχέση ισχύει λόγω του 2ου ερωτήματος.

