# Μαθηματικά
# Θετικής & Τεχν/κής Κατεύθυνσης
# Β΄ Λυκείου 2001

## Ζήτημα 1ο

**Α.1.** Έστω α, β, γ ακέραιοι αριθμοί. Να δείξετε ότι ισχύουν οι επόμενες ιδιότητες:

**α.** Αν $\alpha|\beta$, τότε $\alpha|\lambda\beta$ για κάθε ακέραιο λ.

Μονάδες 4

**β.** Αν $\alpha|\beta$ και $\alpha|\gamma$, τότε $\alpha|(\beta+\gamma)$.

Μονάδες 4

**Α.2.** *Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.*

Έστω α, β φυσικοί αριθμοί και υ το υπόλοιπο της ευκλείδειας διαίρεσης του α με τον $\beta \neq 0$. Τότε:

**α.** $(\alpha,\beta) < (\beta,\upsilon)$
**β.** $(\alpha,\beta) = (\beta,\upsilon)$
**γ.** $(\alpha,\beta) > (\beta,\upsilon)$
**δ.** $(\alpha,\beta) = (\beta,\upsilon) + 1$

όπου $(\alpha,\beta)$ είναι ο Μ.Κ.Δ. των φυσικών αριθμών α, β.

Μονάδες 4,5

**Β.1.** *Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.*

Αν $7 \mid (\alpha+5)$ και $7 \mid (40-\beta)$ τότε:

**α.** $7 \mid (\alpha+\beta)$,
**β.** $7 \mid (\alpha+\beta+1)$,
**γ.** $7 \mid (\alpha+\beta+2)$,
**δ.** $7 \mid (\alpha+\beta-3)$.

Μονάδες 4

**Β.2.** Να προσδιορίσετε τον Μ.Κ.Δ. των ακεραίων 72 και 112.

Μονάδες 4,5

**Β.3.** Να εκφράσετε τον Μ.Κ.Δ. των ακεραίων 72 και 112 ως γραμμικό συνδυασμό των ακεραίων 72 και 112.

Μονάδες 4

**Απάντηση:**

**Α1.**

α. Επειδή $\alpha \mid \beta$ υπάρχει ακέραιος κ, τέτοιος ώστε $\beta=\kappa\alpha$, οπότε
$\lambda\beta=\lambda\kappa\alpha$ και άρα: $\alpha \mid \lambda\beta$

β. Επειδή $\alpha \mid \beta$ και $\alpha \mid \gamma$ , υπάρχουν ακέραιοι κ,λ τέτοιοι ώστε
$\beta=\kappa\alpha$ και $\gamma=\lambda\alpha$. Οπότε:
$\beta + \gamma = \kappa\alpha + \lambda\alpha$ ή
$(\beta + \gamma) = (\kappa + \lambda)\alpha$
Άρα: $\alpha \mid (\beta + \gamma)$

**Α2.** Απάντηση: **β**

**B1.** Είναι:

$$\left.\begin{array}{l} 7 \mid (\alpha+5) \\ 7 \mid (40-\beta) \end{array}\right\} \Rightarrow 7 \mid \left(\alpha+5-(40-\beta)\right)$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 7 \mid \alpha+\beta-35 \\ \text{Όμως}: 7 \mid 35 \end{array}\right\} \Rightarrow 7 \mid \alpha+\beta$$

οπότε: Απάντηση: **α**

**B2.** (72,112) = (8 • 9, 8 • 14) = 8(9, 14) = 8 • 1=8

**B3.** 112 = 72 • 1 +40 ⇔ 40 = 112 - 72 • 1
72 = 40 • 1 + 32 ⇔ 32 = 72 - 40 • 1
40 = 1 • 32 + 8 ⇔ 8 = 40 - 1 • 32
32 = 8 • 4 + 0

Άρα:
8 = 40 - 1 • 32 = 40 - 1(72 - 40 • 1)
= 2 • 40 - 72
= 2(112 - 72) - 72
= -3 • 72 + 2 • 112

## Ζήτημα 2ο

Για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ δίνεται ότι $|\vec{\alpha}|=1,\ |\vec{\beta}|=2$ και $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}) = \frac{\pi}{3}$.

Έστω τα διανύσματα $\vec{u} = 2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta},\ \vec{v} = \vec{\alpha} - 2\vec{\beta}$

Να υπολογίσετε:

**α.** το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$

Μονάδες 5

**β.** τα μέτρα $|\vec{u}|, |\vec{v}|$ των διανυσμάτων $\vec{u}$ και $\vec{v}$

Μονάδες 8

**γ.** το εσωτερικό γινόμενο $\vec{u}\cdot\vec{v}$

Μονάδες 7

**δ.** το συνημίτονο της γωνίας των διανυσμάτων $\vec{u}$ και $\vec{v}$.

Μονάδες 5

**Απάντηση:**

**α.** Είναι:

$$\vec{a}\cdot\vec{\beta} = |\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|\cdot \text{συν}\left(\widehat{\vec{a},\vec{\beta}}\right) = 1\cdot 2\cdot\frac{1}{2} = 1$$

**β.**

$$\left|\vec{u}\right|^2 = \left(2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}\right)^2 = 4\vec{\alpha}^2 + 9\vec{\beta}^2 + 12\vec{\alpha}\vec{\beta} = 4\cdot 1 + 9\cdot 4 + 12\cdot 1 = 52$$

Άρα: $\left|\vec{u}\right| = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$

$$\left|\vec{v}\right|^2 = \left(\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}\right)^2 = \vec{\alpha}^2 + 4\vec{\beta}^2 - 4\vec{\alpha}\vec{\beta} = 1 + 4\cdot 4 - 4 = 17 - 4 = 13$$

Άρα: $\left|\vec{v}\right| = \sqrt{13}$

**γ.**

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \left(2\vec{a} + 3\vec{\beta}\right)\left(\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}\right) = 2\vec{\alpha}^2 - 4\vec{\alpha}\vec{\beta} + 3\vec{\alpha}\vec{\beta} - 6\vec{\beta}^2 =$$
$$= 2\vec{\alpha}^2 - \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} - 6\vec{\beta}^2 = 2\cdot 1 - 1 - 6\cdot 4 = 1 - 24 = -23$$

**δ.**

$$\sigma\upsilon\nu\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right) = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\left|\vec{u}\right|\cdot\left|\vec{v}\right|} = \frac{-23}{2\sqrt{13}\cdot\sqrt{13}} = -\frac{23}{26}$$

## Ζήτημα 3ο

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - y^2 + 6x + 9 = 0$.

**α.** Να δείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση παριστάνει 2 ευθείες $\varepsilon_1$ και $\varepsilon_2$.

Μονάδες 7

**β.** Να δείξετε ότι οι ευθείες $\varepsilon_1$ και $\varepsilon_2$ είναι κάθετες.

Μονάδες 7

**γ.** Να βρείτε ένα σημείο Μ(κ,λ) με κ>0 και λ>0 τέτοιο, ώστε το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ = (3,κ) να είναι παράλληλο προς τη μία από τις δύο ευθείες $\varepsilon_1$ και $\varepsilon_2$ και το διάνυσμα $\vec{\beta}$ = (-16, 4λ) να είναι παράλληλο προς την άλλη ευθεία.

Μονάδες 6

**δ.** Να γράψετε την εξίσωση της παραβολής που έχει κορυφή την αρχή των αξόνων Ο, άξονα συμμετρίας τον άξονα x΄x και διέρχεται από το σημείο Μ.

Μονάδες 5

**Απάντηση:**

**α.** $x^2 - y^2 + 6x + 9 = 0$

$\Leftrightarrow$ $x^2 + 6x + 9 - y^2 = 0$

$\Leftrightarrow$ $(x+3)^2 - y^2 = 0$

$\Leftrightarrow$ $(x+3+y)(x+3-y) = 0$

$\Leftrightarrow$ $(\varepsilon_1)$: $y = -x - 3$ ή $(\varepsilon_2)$: $y = x + 3$

**β.** $\lambda_{\varepsilon_1} = -1$, $\lambda_{\varepsilon_2} = 1$

Οπότε: $\lambda_{\varepsilon_1}\cdot\lambda_{\varepsilon_2} = -1$

Άρα: $(\varepsilon_1) \perp (\varepsilon_2)$

**γ.** Είναι:

$$\begin{pmatrix} \vec{a} = (3,\kappa) \parallel (\varepsilon_1) \\ \vec{\beta} = (\text{-}16, 4\lambda\text{-} \parallel (\varepsilon_2) \end{pmatrix} \quad \text{ή} \quad \begin{pmatrix} \vec{a} = (3,\kappa) \parallel (\varepsilon_2) \\ \vec{\beta} = (\text{-}16, 4\lambda\text{-} \parallel (\varepsilon_1) \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \dfrac{\kappa}{3} = -1 \\ \dfrac{4\lambda}{-16} = 1 \end{pmatrix} \quad \text{ή} \quad \begin{pmatrix} \dfrac{\kappa}{3} = 1 \\ \dfrac{4\lambda}{-16} = -1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \kappa = \text{-}3 \\ \lambda = \text{-}4 \\ \text{απορρ.} \end{pmatrix} \quad \text{ή} \quad \begin{pmatrix} \kappa = 3 \\ \lambda = 4 \\ \text{δεκτές} \end{pmatrix}$$

Άρα: $M(3,4)$

**δ.** Η εξίσωση της παραβολής είναι: $\psi^2 = 2\rho x$

Επειδή το σημείο $M(3,4)$ ανήκει σ'αυτή, έχουμε:

$$16 = 2 \cdot \rho \cdot 3 \Leftrightarrow \frac{16}{6} = \rho \Leftrightarrow \rho = \frac{8}{3}$$

Άρα:

$$\psi^2 = 2 \cdot \frac{8}{3} x \Leftrightarrow \psi^2 = \frac{16}{3} x$$

## Ζήτημα 4ο

**Α.** Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 + 6\mu x + 8\lambda y = 0$, όπου μ, λ πραγματικοί αριθμοί διάφοροι του μηδενός. Να δείξετε ότι, για κάθε τιμή των μ, λ, η παραπάνω εξίσωση παριστάνει κύκλο που διέρχεται από την αρχή των αξόνων Ο.

Μονάδες 7

**Β.** Έστω ότι για τους πραγματικούς αριθμούς μ, λ ισχύει η σχέση $3\mu + 2\lambda = 0$.

**α.** Να δείξετε ότι, όλοι οι κύκλοι που ορίζονται από την εξίσωση $x^2 + y^2 + 6\mu x + 8\lambda y = 0$ για τις διάφορες τιμές των μ και λ, έχουν τα κέντρα τους σε ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Μονάδες 6

**β.** Να βρείτε τα μ, λ έτσι, ώστε, αν Α, Β είναι τα σημεία τομής του αντίστοιχου κύκλου με την ευθεία $x + y + 2 = 0$, να ισχύει

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0.$$

Μονάδες 6

**γ.** Για τις τιμές των μ, λ που βρήκατε στο ερώτημα **β** να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΟΒ.

Μονάδες 6

**Απάντηση:**

**Α.** $x^2 + \psi^2 + 6\mu x + 8\lambda\psi = 0$ ή

$(x^2 + 6\mu x) + (\psi^2 + 8\lambda\mu) = 0$ ή

$(x^2 + 2 \cdot 3\mu \cdot x + 9\mu^2 - 9\mu^2) + (\psi^2 + 2 \cdot 4\lambda \cdot \psi + 16\lambda^2 - 16\lambda^2) = 0$ ή

$(x + 3\mu)^2 - 9\mu^2 + (\psi + 4\lambda)^2 - 16\lambda^2 = 0$ ή

$(x + 3\mu)^2 + (\psi + 4\lambda)^2 = 9\mu^2 + 16\lambda^2$.

Επειδή $9\mu^2 + 16\lambda^2 > 0$ για κάθε λ, $\mu \in R^*$ προκύπτει ότι είναι εξίσωση κύκλου με κέντρο Κ(-3μ, -4λ) και ακτίνα:

$$\rho = \sqrt{9\mu^2 + 16\lambda^2}.$$

Προφανώς οι συντεταγμένες του Ο(0,0) επαληθεύουν τη δοσμένη εξίσωση.

**Β.**

**α.** Έχουμε Κ(-3μ, -4λ) το κέντρο του κύκλου. Θέτουμε

- $-3\mu = x \Leftrightarrow \mu = -(x/3)$ και
- $-4\lambda = \psi \Leftrightarrow \lambda = -(\psi/4)$

και αντικαθιστούμε στην $3\mu + 2\lambda = 0$. Τότε έχουμε:

$$3\left(-\frac{x}{3}\right) + 2\left(-\frac{\psi}{4}\right) = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$-x - \frac{\psi}{2} = 0 \Leftrightarrow \psi = -2x.$$

Άρα έχουν τα κέντρα τους στην ευθεία $\psi = -2x$.

**β. (Α' ΛΥΣΗ)**

Επειδή

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0,$$

προκύπτει ότι

$$\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB} \qquad (1)$$

Επειδή τα Ο, Α και Β είναι σημεία του κύκλου, προκύπτει λόγω της (1) ότι η ΑΒ είναι διάμετρος του κύκλου. Επομένως η ευθεία (ε) με εξίσωσηx + ψ + 2 = 0 διέρχεται από το κέντρο του Κ(-3μ, -4λ).

Οπότε $-3\mu - 4\lambda + 2 = 0$ (2)

Όμως έχουμε $3\mu + 2\lambda = 0$ (3)

Από το σύστημα των εξισώσεων (2), και (3), βρίσκουμε:

$$\lambda = 1 \text{ και } \mu = -\frac{2}{3}$$

**β. (Β' ΛΥΣΗ)**

Έστω ότι είναι ($x_1$, $y_1$) και ($x_2$, $y_2$) οι συντεταγμένες των Α, Β. Αυτές προκύπτουν ως λύσεις του συστήματος

$$\left.\begin{array}{c} x^2 + y^2 + 6\mu x + 8\lambda y = 0 \\ x + y + 2 = 0 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{c} x^2 + (-x - 2)^2 + 6\mu x + 8\lambda\,(-x - 2) = 0 \\ y = -x - 2 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{c} 2x^2 + (4 + 6\mu - 8\lambda)\,x + (4 - 16\lambda) = 0 \\ y = -x - 2 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{c} x^2 + (2 + 3\mu - 8\lambda)\,x + (2 - 8\lambda) = 0 \qquad (1) \\ y = -x - 2 \end{array}\right\}$$

Επειδή 3μ +2λ = 0 η (1) γράφεται

$$X^2 + 2\,(1 - 3\lambda)\,x + (2 - 8\lambda) = 0.$$

Έτσι είναι $x_1 + x_2 = 2\,(3\lambda - 1)$ και $x_1\,x_2 = 2 - 8\lambda$. (2)

Η σχέση τώρα $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$ γράφεται

$$x_1\,x_2 + y_1 \cdot y_2 = 0 \text{ ή}$$

$$x_1\,x_2 + (-\,x_1 - 2)\,(-\,x_2 - 2) = 0 \text{ ή}$$

$$x_1\,x_2 + (x_1 + x_2) + 2 = 0.$$

Λόγω των σχέσεων (2) είναι:

$$2 - 8\lambda + 2\,(3\lambda - 1) + 2 = 0$$

άρα λ = 1 και μ = -2/3.

**γ. (Α' ΛΥΣΗ)**

Για τις τιμές:

$\lambda = 1$ και $\mu = -\dfrac{2}{3}$

Η ακτίνα του κύκλου είναι:

$$\rho = \sqrt{9\left(-\frac{2}{3}\right)^2 + 16 \cdot 1^2} = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

Οπότε:

$$(AB) = 2\rho = 4\sqrt{5}$$

Επομένως:

$$E = \frac{1}{2}(AB)\cdot d(O, AB) = \frac{1}{2}4\sqrt{5}\cdot\frac{|\,0+0+2\,|}{\sqrt{1^2+1^2}} =$$

$$= \frac{1}{2}4\sqrt{5}\cdot\frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{5}}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{10}\ \text{τ.μονάδες}$$

**γ. (Β' ΛΥΣΗ)**

Για τις τιμές

$\lambda = 1,\ \mu = -\frac{2}{3}$

Είναι $x_1 + x_2 = 4$ και $x_1x_2 = -6$.

Το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ δίνεται από:

$$(OAB) = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{2}\cdot|x_1y_2 - x_2y_1| =$$

$$= \frac{1}{2}\left|\,x_1(-x_1-2) - x_2(-x_1-2)\,\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\left|-x_1x_2 - 2x_1 + x_1x_2 + 2x_1\,\right| =$$

$$= |\,x_1 - x_2\,| = \sqrt{(x_2-x_1)^2} =$$

$$= \sqrt{x_1{}^2 x_2{}^2 - 2x_1x_2} =$$

$$= \sqrt{x_1{}^2 x_2{}^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_2} =$$

$$= \sqrt{(x_1+x_2)^2 - 4x_1x_2} =$$

$$= \sqrt{4^2 - 4(-6)} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}\ \text{τ.μ.}$$

**γ. (Γ' ΛΥΣΗ)**

Για τις τιμές λ = 1, μ = -2/3, η εξίσωση του κύκλου γίνεται:

$$x^2 + \psi^2 - 4x + 8\psi = 0$$

Οι συντεταγμένες των Α, Β προκύπτουν από την λύση του συστήματος:

$$\left.\begin{array}{r} x^2 + y^2 - 4x + 8\psi = 0 \\ x + \psi + 2 = 0 \end{array}\right\}$$

Προκύπτει:

$$(x_1,\ \psi_1) = (2-\sqrt{10},\ -4+\sqrt{10})$$
$$(x_2,\ \psi_2) = (2+\sqrt{10},\ -4-\sqrt{10})$$

Το εμβαδόν τώρα του τριγώνου ΟΑΒ δίνεται από:

$$E = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} x_1 & \psi_1 \\ x_2 & \psi_2 \end{vmatrix}\right| = \ldots\ldots\ldots = 2\sqrt{10}\ \tau.\mu.$$