

**ΑΛΓΕΒΡΑ
ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ
Β' ΤΑΞΗΣ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
2002**

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

A. Να αποδείξετε ότι το υπόλοιπο u της διαίρεσης ενός πολυωνύμου $P(x)$ με το $x - \rho$ είναι ίσο με την τιμή του πολυωνύμου για $x = \rho$. Είναι δηλαδή $u = P(\rho)$.

Μονάδες 9

B. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. $e^x = \theta \Leftrightarrow \ln \theta = x$, $\theta > 0$

β. Αν $a > 0$ με $a \neq 1$, τότε για οποιουδήποτε $\theta_1, \theta_2 > 0$ ισχύει:
 $\log_a(\theta_1 \theta_2) = \log_a \theta_1 + \log_a \theta_2$

γ. $\epsilon\varphi 2\alpha = \frac{2\epsilon\varphi\alpha}{1 + \epsilon\varphi^2\alpha}$

δ. $\eta\mu^2\alpha = \frac{1 - \sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2}$

ε. $\epsilon\varphi(\alpha - \beta) = \frac{\epsilon\varphi\alpha + \epsilon\varphi\beta}{1 - \epsilon\varphi\alpha\epsilon\varphi\beta}$

Μονάδες 10

Γ. Πότε μία ακολουθία λέγεται:

α. αριθμητική πρόοδος;

β. γεωμετρική πρόοδος;

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνονται οι αριθμοί $a_1 = \sigma\upsilon\nu 2\alpha$, $a_2 = \sigma\upsilon\nu^2\alpha$, $a_3 = 1$, όπου η γωνία α ικανοποιεί τη σχέση $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

α. Να αποδείξετε ότι αυτοί οι αριθμοί, με τη σειρά που δίνονται, αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής πρόοδου.

Μονάδες 7

β. Να βρείτε τη διαφορά ω αυτής της προόδου.

Μονάδες 8

γ. Να βρείτε το άθροισμα των πέντε πρώτων όρων της προόδου.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = kx^3 - (k + \lambda)x^2 + \lambda x + 1$.

α. Αν $P\left(-\frac{1}{2}\right) = 7$ και $P(-1) = 23$, να αποδείξετε ότι $k = -6$ και $\lambda = -5$.

Μονάδες 8

β. Να γίνει η διαίρεση του $P(x)$, για $k = -6$ και $\lambda = -5$, με το πολυώνυμο $2x + 1$ και να γραφεί το $P(x)$ με την ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης.

Μονάδες 8

γ. Να λυθεί η ανίσωση $P(x) > 7$ για $k = -6$ και $\lambda = -5$.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln\left(\frac{e^{2x} - 1}{e^x + 5}\right)$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της $f(x)$.

Μονάδες 5

β. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 2\ln 2$.

Μονάδες 10

γ. Να λύσετε την ανίσωση $f(x) > 0$.

Μονάδες 10

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

A. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελίδα 67.

B. α Σ
β Λ
γ Λ
δ Σ
ε Λ

Γ. α. Μια ακολουθία λέγεται αριθμητική πρόοδος, αν κάθε όρος της προκύπτει από τον προηγούμενό του με πρόσθεση του ίδιου πάντοτε αριθμού.

β. Μια ακολουθία λέγεται γεωμετρική πρόοδος, αν κάθε όρος της προκύπτει από τον προηγούμενό του με πολ/σμό επί τον ίδιο πάντοτε μη μηδενικό αριθμό.

ΘΕΜΑ 2ο

α. Οι αριθμοί a_1, a_2, a_3 αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής πρόοδου όταν $a_2 = \frac{a_1 + a_3}{2}$ ή $\text{συν}^2 \alpha = \frac{1 + \text{συν} 2\alpha}{2}$ που ισχύει.

β. $\omega = a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = 1 - \text{συν}^2 \alpha = \eta\mu^2 \alpha$

γ.
$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 &= \frac{5}{2} [2a_1 + (5-1)\omega] = \\ &= \frac{5}{2} (2\text{συν} 2\alpha + 4\eta\mu^2 \alpha) = \frac{5}{2} [2(1 - 2\eta\mu^2 \alpha) + 4\eta\mu^2 \alpha] = \\ &= \frac{5}{2} (2 - 4\eta\mu^2 \alpha + 4\eta\mu^2 \alpha) = \frac{5}{2} \cdot 2 = 5. \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ 3ο

α. Με αντικατάσταση στο πολυώνυμο $P(x)$ των τιμών του $x = -\frac{1}{2}$ και $x = -1$ παίρνουμε το ακόλουθο σύστημα:

$$\begin{cases} \kappa \left(-\frac{1}{2}\right)^3 - (\kappa + \lambda) \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \lambda \left(-\frac{1}{2}\right) + 1 = 7 \\ \kappa (-1)^3 - (\kappa + \lambda) (-1)^2 + \lambda (-1) + 1 = 23 \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{8}\kappa - (\kappa + \lambda) \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\lambda + 1 = 7 \\ -\kappa - (\kappa + \lambda) - \lambda + 1 = 23 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\kappa - 2(\kappa + \lambda) - 4\lambda + 8 = 56 \\ -\kappa - \kappa - \lambda - \lambda + 1 = 23 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\kappa - 2\kappa - 2\lambda - 4\lambda = 48 \\ -2\kappa - 2\lambda = 22 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3\kappa - 6\lambda = 48 \\ -2\kappa - 2\lambda = 22 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \kappa + 2\lambda = -16 \\ \kappa + \lambda = -11 \end{cases}$$

Η λύση του συστήματος είναι $(\kappa, \lambda) = (-6, -5)$.

β. Το $P(x)$ για τις τιμές $\kappa = -6$ και $\lambda = -5$ γράφεται:

$$P(x) = -6x^3 - (-11)x^2 - 5x + 1 = -6x^3 + 11x^2 - 5x + 1$$

$-6x^3 + 11x^2 - 5x + 1$	$2x + 1$
$+ 6x^3 + 3x^2$	$-3x^2 + 7x - 6$
$14x^2 - 5x + 1$	
$- 14x^2 - 7x$	
$- 12x + 1$	
$+ 12x + 6$	
7	

Άρα: $-6x^3 + 11x^2 - 5x + 1 = (2x + 1)(-3x^2 + 7x - 6) + 7$

γ. Η ανίσωση $P(x) > 7$ γράφεται:

$$\begin{aligned} (2x + 1)(-3x^2 + 7x - 6) + 7 &> 7 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (2x + 1)(-3x^2 + 7x - 6) &> 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (2x + 1)(3x^2 - 7x + 6) &< 0. \end{aligned}$$

Όμως $3x^2 - 7x + 6 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, αφού $\Delta = 49 - 72 = -23 < 0$.

Επομένως η ανίσωση τελικά γίνεται: $2x + 1 < 0 \Leftrightarrow x < -\frac{1}{2}$.

ΘΕΜΑ 4ο

α. Το πεδίο ορισμού της $f(x)$ είναι το σύνολο

$$\{x \in \mathbb{R}: e^x + 5 \neq 0 \text{ και } \frac{e^{2x} - 1}{e^x + 5} > 0\}.$$

Όμως $e^x + 5 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε η $e^x + 5 \neq 0$ ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$,

ενώ η $\frac{e^{2x} - 1}{e^x + 5} > 0 \Leftrightarrow e^{2x} - 1 > 0 \Leftrightarrow e^{2x} > 1 \Leftrightarrow e^{2x} > e^0$.

Όμως η συνάρτηση $g(x) = e^x$ είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} (1).
Οπότε $2x > 0 \Leftrightarrow x > 0$.

Άρα το πεδίο ορισμού της f είναι $A = (0, +\infty)$.

$$\beta. \quad f(x) = 2 \ln 2 \Leftrightarrow \ln \left(\frac{e^{2x} - 1}{e^x + 5} \right) = \ln 2^2 \stackrel{\ln x(1-1)}{\Leftrightarrow}$$

$$\frac{e^{2x} - 1}{e^x + 5} = 4 \Leftrightarrow e^{2x} - 1 = 4e^x + 20 \Leftrightarrow e^{2x} - 4e^x - 21 = 0.$$

Αν θέσουμε $e^x = y > 0$ η τελευταία γίνεται:

$$y^2 - 4y - 21 = 0 \Leftrightarrow (y = -3 \text{ απορρίπτεται ή } y = 7).$$

Άρα $e^x = 7 \Leftrightarrow \ln 7$.

$$\gamma. \quad f(x) > 0 \Leftrightarrow \ln \left(\frac{e^{2x} - 1}{e^x + 5} \right) > 0 \Leftrightarrow$$

$$\ln \left(\frac{e^{2x} - 1}{e^x + 5} \right) > \ln 1 \stackrel{\ln x(1-1)}{\Leftrightarrow} \frac{e^{2x} - 1}{e^x + 5} > 1 \stackrel{e^x + 5 > 0}{\Leftrightarrow}$$

$$e^{2x} - 1 > e^x + 5 \Leftrightarrow e^{2x} - e^x - 6 > 0.$$

Αν θέσουμε $e^x = y > 0$ η τελευταία γράφεται:

$$y^2 - y - 6 > 0 \Leftrightarrow (y - 3) \cdot (y + 2) > 0 \stackrel{y > 0}{\Leftrightarrow} y - 3 > 0 \Leftrightarrow y > 3.$$

Δηλαδή $e^x > 3 \Leftrightarrow e^x > e^{\ln 3} \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} x > \ln 3$.