

# ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ & ΕΠΑ.Λ. Β'

2 ΙΟΥΝΙΟΥ 2014

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

## ΘΕΜΑ Α

**A1.** Έστω μια συνάρτηση  $f$  ορισμένη σε ένα διάστημα  $\Delta$ . Αν

- η  $f$  είναι συνεχής στο  $\Delta$  και
- $f'(x) = 0$  για κάθε εσωτερικό σημείο  $x$  του  $\Delta$ ,

τότε να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι σταθερή σε όλο το διάστημα  $\Delta$ .

**Μονάδες 8**

**A2.** Έστω μια συνάρτηση  $f$  συνεχής σε ένα διάστημα  $\Delta$  και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του  $\Delta$ . Πότε λέμε ότι η συνάρτηση  $f$  στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω ή είναι κοίλη στο  $\Delta$ ;

**Μονάδες 4**

**A3.** Έστω μια συνάρτηση  $f$  με πεδίο ορισμού  $A$ . Πότε λέμε ότι η  $f$  παρουσιάζει στο  $x_0 \in A$  (ολικό) μέγιστο, το  $f(x_0)$ ;

**Μονάδες 3**

**A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

**α)** Για κάθε  $z \in \mathbb{C}$  ισχύει  $z - \bar{z} = 2 \operatorname{Im}(z)$

(μονάδες 2)

**β)** Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$  ή  $-\infty$ , τότε  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$

(μονάδες 2)

**γ)** Αν μια συνάρτηση  $f$  παρουσιάζει (ολικό) μέγιστο, τότε αυτό θα είναι το μεγαλύτερο από τα τοπικά της μέγιστα.

(μονάδες 2)

**δ)** Αν η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής σε ένα διάστημα  $\Delta$  και  $\alpha, \beta, \gamma \in \Delta$ , τότε ισχύει

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x) dx + \int_{\gamma}^{\beta} f(x) dx$$

(μονάδες 2)

**ε)** Έστω συνάρτηση  $f$  συνεχής σε ένα διάστημα  $\Delta$  και παραγωγίσιμη σε κάθε εσωτερικό σημείο του  $\Delta$ . Αν η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $\Delta$ , τότε η παράγωγός της είναι υποχρεωτικά αρνητική στο εσωτερικό του  $\Delta$ .

(μονάδες 2)

**Μονάδες 10**

## ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η εξίσωση

$$2|z|^2 + (z + \bar{z})i - 4 - 2i = 0, z \in \mathbb{C}$$

**B1.** Να λύσετε την παραπάνω εξίσωση.

**Μονάδες 9**

**B2.** Αν  $z_1 = 1 + i$  και  $z_2 = 1 - i$  είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης, τότε να αποδείξετε ότι ο αριθμός

$$w = 3 \left( \frac{z_1}{z_2} \right)^{39}$$

είναι ίσος με  $-3i$

**Μονάδες 8**

**B3.** Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών  $u$  για τους οποίους ισχύει

$$|u + w| = |4z_1 - z_2 - i|$$

όπου  $w, z_1, z_2$  οι μιγαδικοί αριθμοί του ερωτήματος B2.

**Μονάδες 8**

## ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση  $h(x) = x - \ln(e^x + 1), x \in \mathbb{R}$

**Γ1.** Να μελετήσετε την  $h$  ως προς την κυρτότητα.

**Μονάδες 5**

**Γ2.** Να λύσετε την ανίσωση

$$e^{h(2h(x))} < \frac{e}{e+1}, x \in \mathbb{R}$$

**Μονάδες 7**

**Γ3.** Να βρείτε την οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της  $h$  στο  $+\infty$ , καθώς και την πλάγια ασύμπτωτή της στο  $-\infty$ .

**Μονάδες 6**

**Γ4.** Δίνεται η συνάρτηση  $\varphi(x) = e^x (h(x) + \ln 2), x \in \mathbb{R}$

Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της  $\varphi(x)$ , τον άξονα  $x'x$  και την ευθεία  $x = 1$

**Μονάδες 7**

## ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x}, & \text{αν } x \neq 0 \\ 1, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$

**Δ1.** Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι συνεχής στο σημείο  $x_0 = 0$  και, στη συνέχεια, ότι είναι γνησίως αύξουσα.

**Μονάδες 7**

**Δ2.** Δίνεται επιπλέον ότι η  $f$  είναι κυρτή.

**α)** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$\int_1^{2f(x)} f(u) du = 0$$

έχει ακριβώς μία λύση, η οποία είναι η  $x = 0$

(μονάδες 7)

**β)** Ένα υλικό σημείο  $M$  ξεκινά τη χρονική στιγμή  $t = 0$  από ένα σημείο  $A(x_0, f(x_0))$  με  $x_0 < 0$  και κινείται κατά μήκος της καμπύλης  $y = f(x)$ ,  $x \geq x_0$  με  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $t \geq 0$ . Σε ποιο σημείο της καμπύλης ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης  $x(t)$  του σημείου  $M$  είναι διπλάσιος του ρυθμού μεταβολής της τεταγμένης του  $y(t)$ , αν υποθεθεί ότι  $x'(t) > 0$  για κάθε  $t \geq 0$ .

(μονάδες 4)

**Μονάδες 11**

**Δ3.** Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$g(x) = (xf(x) + 1 - e)^2 (x - 2)^2, \quad x \in (0, +\infty)$$

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $g$  έχει δύο θέσεις τοπικών ελαχίστων και μία θέση τοπικού μεγίστου.

**Μονάδες 7**