

# ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΑΛΓΕΒΡΑ)

ΕΠΑ.Λ.

(Νέο Σύστημα Εξετάσεων)

19 ΜΑΪΟΥ 2016

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

## ΘΕΜΑ Α

**A1.** Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της ταυτοτικής συνάρτησης  $f(x) = x$  είναι  $f'(x) = (x)' = 1$  για κάθε  $x$  στο σύνολο  $\mathbb{R}$  των πραγματικών αριθμών.

**Μονάδες 10**

**A2.** Να δώσετε τον ορισμό της διαμέσου ( $\delta$ ) ενός δείγματος  $n$  παρατηρήσεων, όταν το  $n$  είναι περιττός αριθμός.

**Μονάδες 5**

**A3.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή ή τη λέξη **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

**α)**  $(\eta\mu x)' = \sigma\upsilon\nu x$

(Μον. 2)

**β)**  $(\sqrt{3})' = \frac{1}{2\sqrt{3}}$

(Μον. 2)

**γ)** Σε μία κανονική ή περίπου κανονική κατανομή στο διάστημα  $(\bar{x} - s, \bar{x} + s)$  βρίσκεται το 68% περίπου των παρατηρήσεων.

(Μον. 2)

**δ)** Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_1$  και  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l_2$  όπου  $l_1, l_2$  πραγματικοί αριθμοί τότε:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x)g(x)) = l_1 l_2.$$

(Μον. 2)

**ε)** Μια συνάρτηση  $f$  λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα  $\Delta$  του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε σημεία  $x_1, x_2 \in \Delta$  με  $x_1 < x_2$  ισχύει  $f(x_1) < f(x_2)$ .

(Μον. 2)

**Μονάδες 10**

## ΘΕΜΑ Β

Στον παρακάτω πίνακα δίνεται ο αριθμός των πιστωτικών καρτών που έχουν 20 υπάλληλοι μιας επιχείρησης.

Αριθμός πιστωτικών καρτών $x_i$	Αριθμός υπαλλήλων $n_i$	Αθροιστική Συχνότητα $N_i$	Σχετική Συχνότητα $f_i\%$	$x_i \cdot n_i$
0	5			
1		9		
2			10	
3				
4				
<b>ΣΥΝΟΛΑ</b>				

**B1.** Αν γνωρίζετε ότι η 5<sup>η</sup> συχνότητα ( $n_5$ ) ισούται με την 1<sup>η</sup> συχνότητα ( $n_1$ ), να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον παραπάνω πίνακα και να τον συμπληρώσετε.

**Μονάδες 10**

**B2.** Να υπολογίσετε τη μέση τιμή  $\bar{x}$  των πιστωτικών καρτών των υπαλλήλων.

**Μονάδες 5**

**B3.** Να υπολογίσετε τον αριθμό των υπαλλήλων που έχουν το πολύ 3 πιστωτικές κάρτες.

**Μονάδες 5**

**B4.** Να υπολογίσετε το ποσοστό των υπαλλήλων που έχουν τουλάχιστον 2 πιστωτικές κάρτες.

**Μονάδες 5**

## ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπο:  $f(x) = \frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{2}$

**Γ1.** Να αποδείξετε ότι  $f'(x) = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$ .

**Μονάδες 6**

**Γ2.** Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της συνάρτησης  $f$  στα σημεία  $x_1 = -1$  και  $x_2 = 1$ .

**Μονάδες 4**

**Γ3.** Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς τη μονοτονία και να βρείτε τα τοπικά της ακρότατα.

**Μονάδες 12**

**Γ4.** Να συγκρίνετε τις τιμές  $f(2015)$  και  $f(2016)$  της συνάρτησης  $f$ .

**Μονάδες 3**

### **ΘΕΜΑ Δ**

Δίνεται η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπο:  $f(x) = x^2 + \alpha x - 3$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$

**Δ1.** Να υπολογίσετε την τιμή του  $\alpha$  αν  $a = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 6x + 8}{x - 4}$

**Μονάδες 8**

**Δ2.** Για  $\alpha = 2$  να βρείτε την  $f'(x)$ .

**Μονάδες 3**

**Δ3.** Για  $\alpha = 2$  να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$  στο σημείο  $M(-2, f(-2))$ .

**Μονάδες 8**

**Δ4.** Αν τα σημεία  $A_1(x_1, y_1)$ ,  $A_2(x_2, y_2)$ ,  $A_3(x_3, y_3)$ ,  $A_4(x_4, y_4)$ ,  $A_5(x_5, y_5)$  ανήκουν στην ευθεία  $\varepsilon: y = -2x - 7$  και οι τετμημένες  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$  των σημείων  $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5$  έχουν μέση τιμή  $\bar{x} = 2$ , να βρείτε τη μέση τιμή  $\bar{y}$  των τεταγμένων  $y_1, y_2, y_3, y_4, y_5$  των σημείων αυτών.

**Μονάδες 6**

# ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΑΛΓΕΒΡΑ)

ΕΠΑ.Λ.

(Νέο Σύστημα Εξετάσεων)

19 ΜΑΪΟΥ 2016

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

## ΘΕΜΑ Α

A1. Θεωρία. Σχολικό βιβλίο σελ. 28

A2. Θεωρία. Σχολικό βιβλίο σελ. 87

A3. α.→Σωστό β.→Λάθος γ.→Σωστό δ.→Σωστό ε.→Σωστό

## ΘΕΜΑ Β

B1.

Αριθμός πιστωτικών καρτών $x_i$	Αριθμός υπαλλήλων $v_i$	Αθροιστική Συχνότητα $N_i$	Σχετική Συχνότητα $f_i\%$	$x_i v_i$
0	5	5	25	0
1	4	9	20	4
2	2	11	10	4
3	4	15	20	12
4	5	20	25	20
<b>ΣΥΝΟΛΑ</b>	<b>20</b>	<b>–</b>	<b>100</b>	<b>40</b>

B2. Η μέση τιμή είναι  $\bar{x} = \frac{40}{20} = 2$

B3. Το πολύ 3 πιστωτικές κάρτες έχουν 15 υπάλληλοι.

B4. Τουλάχιστον 2 πιστωτικές κάρτες έχει ποσοστό  $(10 + 20 + 25)\% = 55\%$  των υπαλλήλων.

## ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Είναι:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left( \frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{2} \right)' = \left( \frac{x}{x^2+1} \right)' = \frac{x'(x^2+1) - x(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} = \\ &= \frac{x^2+1 - x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} \end{aligned}$$

Γ2. Στο σημείο  $x_1 = -1$  ο ρυθμός μεταβολής της συνάρτησης  $f$  είναι:

$$f'(-1) = \frac{1 - (-1)^2}{((-1)^2 + 1)^2} = \frac{1 - 1}{4} = \frac{0}{4} = 0$$

Στο σημείο  $x_2 = 1$  ο ρυθμός μεταβολής της συνάρτησης  $f$  είναι:

$$f'(1) = \frac{1 - 1^2}{(1^2 + 1)^2} = \frac{1 - 1}{4} = \frac{0}{4} = 0$$

**Γ3.** Λύνουμε την εξίσωση

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2} = 0 \Leftrightarrow 1 - x^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (1 - x)(1 + x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } x = -1$$

Από τον ακόλουθο πίνακα έχουμε την μονοτονία και τα ακρότατα της συνάρτησης

$x$	$-\infty$	$-1$	$1$	$+\infty$	
$f'$	$-$	$\circ$	$+$	$\circ$	$-$
$f$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$

T.min
T.max  
 $f(-1)=0$ 
 $f(1)=1$

**Γ4.** Επειδή οι αριθμοί 2015 και 2016 ανήκουν στο διάστημα  $[1, +\infty)$  στο οποίο η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα έχουμε:

$$2015 < 2016 \Rightarrow f(2015) > f(2016)$$

### ΘΕΜΑ Δ

**Δ1.** Είναι:  $\alpha = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 6x + 8}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x - 2)(x - 4)}{(x - 4)} = \lim_{x \rightarrow 4} (x - 2) = 4 - 2 = 2.$

**Δ2.** Για την τιμή  $\alpha = 2$  έχουμε:  $f(x) = x^2 + 2x - 3$

$$\text{με } f'(x) = (x^2 + 2x - 3)' = 2x + 2.$$

**Δ3.** Για την τιμή  $\alpha = 2$  ο τύπος της  $f$  γράφεται:  $f(x) = x^2 + 2x - 3$ , οπότε

$$f(-2) = (-2)^2 + 2(-2) - 3 = 4 - 4 - 3 = -3$$

επομένως το σημείο  $M(-2, f(-2))$  είναι  $M(-2, -3)$ .

Η εξίσωση εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της  $f$  στο σημείο  $M(-2, -3)$  είναι:

$$y - f(-2) = f'(-2)(x + 2)$$

$$y - (-3) = -2(x + 2)$$

$$y + 3 = -2x - 4$$

$$y = -2x - 7$$

**Δ4.** Είναι  $\bar{y} = -2\bar{x} - 7$   
όμως  $\bar{x} = 2$   
επομένως  $\bar{y} = -2 \cdot 2 - 7 = -4 - 7 = -11$

