ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ & ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

2017

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Αν οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι

$$\left(f(x)+g(x)\right)' = f'(x)+g'(x), \quad \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Μονάδες 7

Α2. Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το Α. Πότε λέμε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_0 \in \mathrm{A}$;

Μονάδες 4

Α3. Αν ομαδοποιήσουμε τις παρατηρήσεις μιας μεταβλητής σε κλάσεις, τι ονομάζουμε πλάτος μιας κλάσης;

Μονάδες 4

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Αν $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ και $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμες συναρτήσεις, τότε ισχύει

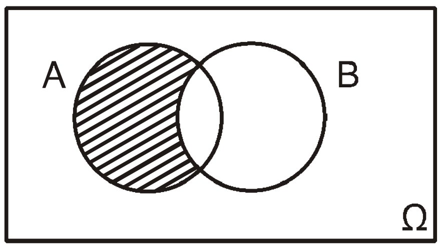
$$\left(f\left(g\left(x\right)\right)\right)' = f'\left(g\left(x\right)\right)\cdot g'(x), \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

β) Μία συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$, με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$.

γ) Το κυκλικό διάγραμμα χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση μόνο ποσοτικών δεδομένων.

δ) Για οποιαδήποτε ενδεχόμενα Α και Β ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει ότι $P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$.

ε) Το γραμμοσκιασμένο χωρίο στο διπλανό σχήμα αντιστοιχεί στο ενδεχόμενο Β – Α.



Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Στον παρακάτω πίνακα δίνονται οι τιμές x_i και οι αντίστοιχες συχνότητες v_i που προέκυψαν από παρατηρήσεις μιας μεταβλητής Χ.

x_i	v_i
1	2
3	3
5	4
9	1

Β1. Για τις παρατηρήσεις αυτές να υπολογιστούν:

α. η μέση τιμή $\bar{x}$ (μονάδες 6)

β. η διάμεσος δ (μονάδες 5)

γ. η διακύμανση s^2. (μονάδες 7)

Μονάδες 18

Β2. Να εξετάσετε αν το δείγμα των παραπάνω παρατηρήσεων είναι ομοιογενές.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - x + 1,\ x \in \mathbb{R}$.

Γ1. Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης f.

Μονάδες 6

Γ2. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A\,(2, f(2))$.

Μονάδες 7

Γ3. Να βρείτε τα σημεία στα οποία η ευθεία (ε) του ερωτήματος **Γ2** τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

Μονάδες 4

Γ4. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{f(x)} - 1}{x - 1}$.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Δ

Ένα κουτί έχει τρεις μπάλες, μία άσπρη, μία μαύρη και μία κόκκινη. Κάνουμε το εξής πείραμα: παίρνουμε από το κουτί μια μπάλα, καταγράφουμε το χρώμα της και την ξαναβάζουμε στο κουτί. Επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία άλλη μια φορά.

Δ1. Να κατασκευάσετε το δενδροδιάγραμμα που περιγράφει το παραπάνω πείραμα (μονάδες 3) και να γράψετε τον δειγματικό χώρο Ω του πειράματος. (μονάδες 2)

Μονάδες 5

Δ2. Να παρασταθούν με αναγραφή των στοιχείων τους τα ενδεχόμενα που προσδιορίζονται από την αντίστοιχη ιδιότητα:

Α: «η δεύτερη μπάλα που θα εξαχθεί να είναι μαύρη»
Β: «να εξαχθούν δυο μπάλες διαφορετικού χρώματος».

Μονάδες 6

Δ3. Υποθέτουμε ότι ο δειγματικός χώρος Ω του προηγούμενου πειράματος αποτελείται από ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα και Α, Β είναι τα ενδεχόμενα του ερωτήματος **Δ2**.

α. Να υπολογίσετε την πιθανότητα των παρακάτω ενδεχομένων:
A', $A \cap B$, $A - B$, $B - A$. (μονάδες 8)

β. Αν Γ είναι ένα ενδεχόμενο του δειγματικού χώρου Ω, το οποίο είναι ασυμβίβαστο τόσο με το ενδεχόμενο Α όσο και με το ενδεχόμενο Β, να υπολογίσετε ποια είναι η μεγαλύτερη τιμή που μπορεί να έχει η πιθανότητα $P(\Gamma)$. (μονάδες 6)

Μονάδες 14

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία, σχολικό βιβλίο σελ. 31.

Α2. Θεωρία, σχολικό βιβλίο σελ. 14.

Α3. Θεωρία, σχολικό βιβλίο σελ. 72:
Πλάτος μιας κλάσης ονομάζεται η διαφορά του κατώτερου από το ανώτερο όριο της κλάσης.

Α4. **α)** $\rightarrow$ Σ, **β)** $\rightarrow$ Λ, **γ)** $\rightarrow$ Λ, **δ)** $\rightarrow$ Σ, **ε)** $\rightarrow$ Λ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Για τη μέση τιμή $\overline{x}$ είναι:

α. $$\overline{x} = \frac{v_1 \cdot x_1 + v_2 \cdot x_2 + v_3 \cdot x_3 + v_4 \cdot x_4}{10} = \frac{1 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 5 + 1 \cdot 9}{10} = \frac{40}{10} = 4.$$

β. Οι παρατηρήσεις διατεταγμένες σε αύξουσα σειρά είναι:
1, 1, 3, 3, 3, 5, 5, 5, 5, 9.
Το μέγεθος του δείγματος είναι ν = 10 που είναι άρτιος αριθμός. Έτσι
$$\delta = \frac{t_5 + t_6}{2} = \frac{3+5}{2} = 4.$$

γ.
$$s^2 = \frac{v_1\left(x_1 - \overline{x}\right)^2 + v_2\left(x_2 - \overline{x}\right)^2 + v_3\left(x_3 - \overline{x}\right)^2 + v_4\left(x_4 - \overline{x}\right)^2}{10} =$$
$$= \frac{2(1-4)^2 + 3(3-4)^2 + 4(5-4)^2 + 1(9-4)^2}{10} =$$
$$= \frac{2 \cdot 9 + 3 \cdot 1 + 4 \cdot 1 + 25}{10} = \frac{50}{10} = 5.$$

Β2. Για να εξετάσουμε αν το δείγμα είναι ομοιογενές υπολογίζουμε το συντελεστή μεταβολής $cv = \frac{s}{\overline{x}} = \frac{\sqrt{5}}{4} = \frac{25\sqrt{5}}{100} > \frac{10}{100}$.

Άρα το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η $f(x) = x^2 - x + 1$, $x \in \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = 2x - 1$.

Λύνουμε την εξίσωση:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1/2$$

και κατασκευάζουμε πίνακα μεταβολών της f.

x	$-\infty$	1/2	$+\infty$
f′	-		+
f	↘		↗

Είναι $f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$.

Άρα η f παρουσιάζει στη θέση $x = 1/2$, ελάχιστο $f(1/2) = 3/4$.

Γ2. Είναι $f(2) = 2^2 - 2 + 1 = 4 - 2 + 1 = 3$, οπότε Α$(2, 3)$.

Έστω $y = \alpha x + \beta$ η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο Α$(2, 3)$. Τότε θα έχουμε:

$$3 = 2\alpha + \beta \quad (1)$$

Όμως $\alpha = f'(2) = 2 \cdot 2 - 1 = 4 - 1 = 3$ (2)

Από τις (1) και (2) βρίσκουμε $\beta = -3$.

Άρα η εξίσωση της εφαπτομένης ευθείας (ε) στο σημείο Α(2, 3) είναι

$$y = 3x - 3 \quad (\varepsilon).$$

Γ3.

- Για $y = 0$ η (ε) γράφεται $3x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.
  Επομένως η (ε) τέμνει τον $x'x$ στο σημείο Β$(1, 0)$.
- Για $x = 0$ η (ε) γράφεται $y = 3 \cdot 0 - 3 \Leftrightarrow y = -3$
  Επομένως η (ε) τέμνει τον $y'y$ στο σημείο Γ$(0, -3)$.

Γ4. Είναι:

$$\frac{\sqrt{f(x)} - 1}{x - 1} = \frac{\sqrt{x^2 - x + 1} - 1}{x - 1} = \frac{x^2 - x + 1 - 1}{(x-1)\left(\sqrt{x^2 - x + 1} + 1\right)} =$$

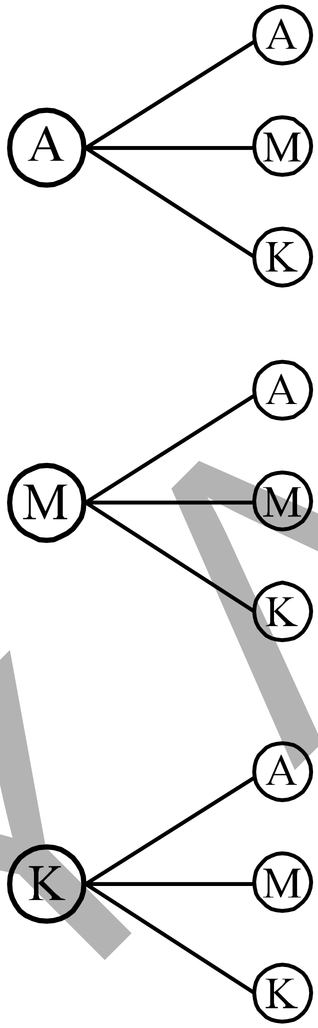
$$= \frac{x^2 - x}{(x-1)\left(\sqrt{x^2 - x + 1} + 1\right)} = \frac{x(x-1)}{(x-1)\left(\sqrt{x^2 - x + 1} + 1\right)} =$$

$$= \frac{x}{\left(\sqrt{x^2 - x + 1} + 1\right)}$$

Άρα $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\sqrt{f(x)} - 1}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1} \frac{x}{\sqrt{x^2 - x + 1} + 1} = \frac{1}{2}$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Από το πείραμα προκύπτει το εξής δενδροδιάγραμμα:



Έτσι ο αντίστοιχος δειγματικός χώρος είναι:

$$\Omega = \{ AA, AM, AK, MA, MM, MK, KA, KM, KK\}$$

Δ2.

$A = \{AM, MM, KM\}$

$B = \{ AM, AK, MA, MK, KA, KM \}$

Δ3. **α.** Από το **Δ2** προκύπτει ότι:
N(A) = 3, N(B) = 6, ενώ N(Ω) = 9.

Έτσι είναι:

$$P(A)=\frac{N(A)}{N(\Omega)}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3},\ \text{άρα}\ P(A')=1-P(A)=\frac{2}{3}.$$

$A \cap B = \{AM, KM\}$, με $N(A \cap B) = 2$, άρα:

$$P(A\cap B)=\frac{N(A\cap B)}{N(\Omega)}=\frac{2}{9}.$$

- $A - B = \{ MM \}$, $N(A - B) = 1$, άρα:

$$P(A-B)=\frac{N(A-B)}{N(\Omega)}=\frac{1}{9}.$$

- $B - A = \{ AK, MA, MK, KA \}$, $N(B-A) = 4$, άρα:

$$P(B-A)=\frac{N(B-A)}{N(\Omega)}=\frac{4}{9}.$$

β. Για να είναι το ενδεχόμενο Γ ασυμβίβαστο τόσο με το Α, όσο και με το Β, δεν θα πρέπει να έχει κανένα κοινό στοιχείο με το ενδεχόμενο $A \cup B$.

Άρα το Γ είναι υποσύνολο του $(A\cup B)'=\{AA, KK\}$

Άρα $\Gamma \subseteq (A\cup B)' \Rightarrow P(\Gamma) \le P\left[(A\cup B)'\right] \Rightarrow P(\Gamma) \le \frac{2}{9}.$

Προκύπτει ότι η μεγαλύτερη τιμή που μπορεί να έχει η $P(\Gamma)$ είναι $\frac{2}{9}$.

<u>**β΄ τρόπος**</u>

Για να είναι το ενδεχόμενο Γ ασυμβίβαστο τόσο με το Α, όσο και με το Β, δεν θα πρέπει να έχει κανένα κοινό στοιχείο με το ενδεχόμενο $A \cup B$.
Άρα θα είναι:

$\Gamma = \{AA\}$ με $P(\Gamma)=\frac{1}{9}$ ή

$\Gamma = \{KK\}$ με $P(\Gamma)=\frac{1}{9}$ ή

$\Gamma = \{AA, KK\}$ με $P(\Gamma)=\frac{2}{9}$.

Προκύπτει ότι η μέγιστη τιμή για το $P(\Gamma)$ είναι $\frac{2}{9}$.