<u>ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΑΛΓΕΒΡΑ)</u>

ΕΠΑ.Λ.

2018

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω $x_1, x_2, ..., x_\kappa$ οι τιμές μιας μεταβλητής Χ που αφορά τα άτομα ενός δείγματος μεγέθους ν, όπου κ, ν μη μηδενικοί φυσικοί αριθμοί με $\kappa \leq \nu$.

α. Τι ονομάζεται απόλυτη συχνότητα ν_i που αντιστοιχεί στην τιμή x_i, $i = 1, 2, ..., \kappa$;

(Μον. 3)

β. Τι ονομάζεται σχετική συχνότητα f_i της τιμής x_i, $i = 1, 2, ..., \kappa$;

(Μον. 3)

γ. Να αποδείξετε ότι $f_1 + f_2 + \ldots + f_\kappa = 1$.

(Μον. 4)

Μονάδες 10

Α2. Έστω f μία συνάρτηση με πεδίο ορισμού το A. Πότε λέμε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 5

Α3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Σε μια κανονική ή περίπου κανονική κατανομή το 68% περίπου των παρατηρήσεων βρίσκεται στο διάστημα $(\bar{x} - s, \bar{x} + s)$, όπου $\bar{x}$ η μέση τιμή και s η τυπική απόκλιση.

β. $(\text{συν}x)' = \text{ημ}x$

γ. Το κυκλικό διάγραμμα χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση μόνο ποσοτικών δεδομένων.

δ. Η διακύμανση $(s)^2$ είναι μέτρο διασποράς.

ε. Αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και ισχύει $f'(x) < 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι αριθμοί: 14, 12, 18, $4\alpha - 1$, 16 με $\alpha \in \mathbb{R}$.

Β1. Αν η διάμεσος των παραπάνω αριθμών είναι ίση με 15, να υπολογίσετε την τιμή του α.

Μονάδες 7

Β2. Για $\alpha = 4$ να υπολογίσετε τη διακύμανση (s^2).

Μονάδες 7

Β3. Για $\alpha = 4$ να εξετάσετε αν το δείγμα των παραπάνω αριθμών είναι ομοιογενές.

Μονάδες 5

Β4. Για $\alpha = 4$ να υπολογίσετε το συντελεστή μεταβολής των αριθμών που θα προκύψουν, αν ο καθένας από τους παραπάνω αριθμούς πολλαπλασιαστεί με το –2 και στη συνέχεια αυξηθεί κατά 5.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = 2x^3 - 3\kappa x^2 + \kappa, \quad \kappa \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Γ1. Εάν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $M(1, f(1))$ είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$, να υπολογίσετε τον αριθμό κ.

Μονάδες 5

Γ2. Για $\kappa = 1$ να βρείτε την τιμή του x για την οποία ο ρυθμός μεταβολής της $f(x)$ γίνεται ελάχιστος.

Μονάδες 10

Γ3. Για $\kappa = 1$ να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f' στο σημείο $(-1, f'(-1))$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x)=\sqrt{x^2+4}+2018, \quad x\in\mathbb{R}.$$

Δ1. Να δείξετε ότι $f'(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+4}}$

Μονάδες 6

Δ2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το είδος και την τιμή του ακρότατου.

Μονάδες 9

Δ3. Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x^2+4)f'(x)-2x}{x^2}$$

Μονάδες 10

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. **α.** Απόλυτη συχνότητα v_i που αντιστοιχεί στην τιμή x_i, ονομάζεται το πλήθος των ατόμων του πληθυσμού (ή του δείγματος) για τα οποία η μεταβλητή παίρνει την τιμή x_i.

β. Σχετική συχνότητα f_i της τιμής x_i, i = 1, 2, … κ, ονομάζεται ο λόγος της συχνότητας v_i της τιμής x_i προς το μέγεθος του δείγματος. Είναι δηλαδή $f_i = \dfrac{v_i}{v}$.

γ. $f_1 + f_2 + ... + f_\kappa = \dfrac{v_1}{v} + \dfrac{v_2}{v} + ... \dfrac{v_\kappa}{v} = \dfrac{v_1 + v_2 + ... + v_\kappa}{v} = \dfrac{v}{v} = 1$

Α2. Μία συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0, του πεδίου ορισμού της, αν υπάρχει το όριο $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ και είναι πραγματικός αριθμός.

Α3. **α.** Σωστό (Σ)
β. Λάθος (Λ)
γ. Λάθος (Λ)
δ. Σωστό (Σ)
ε. Λάθος (Λ)

ΘΕΜΑ Β

Β1. Επειδή οι όροι του δείγματος είναι 5 και η διάμεσος είναι 15, προκύπτει ότι
$4\alpha - 1 = 15 \Leftrightarrow 4\alpha = 16 \Leftrightarrow \alpha = 4$.

Β2. Η μέση τιμή είναι

$$\overline{x} = \frac{14+12+18+15+16}{5} = \frac{75}{5} = 15$$

οπότε

$$S^2 = \frac{(15-14)^2 + (15-12)^2 + (15-15)^2 + (15-16)^2 + (15-18)^2}{5} =$$

$$= \frac{1+9+0+1+9}{5} = \frac{20}{5} = 4$$

Β3. Είναι $\text{CV} = \dfrac{s}{|\bar{x}|} = \dfrac{2}{15} \simeq 0{,}13 = 13\%$.

Επειδή 13% > 10% το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

Β4. Στο αρχικό δείγμα έχουμε:

$$\bar{x} = 15 \quad \text{και} \quad s_x = 2$$

Στο νέο δείγμα έχουμε:

$\bar{y} = -2 \cdot 15 + 5 = -30 + 5 = -25$ και

$s_y = |-2| \cdot 2 = 4$

Οπότε

$\text{CV}_y = \dfrac{4}{|-25|} = 0{,}16 = 16\%$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Είναι $f'(x) = 6x^2 - 6\kappa x$

Επειδή η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $M(1, f(x))$ είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$, θα έχουμε:

$f'(1) = 0$ οπότε

$6 - 6\kappa = 0 \Leftrightarrow 6(1 - \kappa) = 0 \Leftrightarrow \kappa = 1$.

Γ2. Για $\kappa = 1$ η παράγωγος συνάρτησης της f γράφεται $f'(x) = 6x^2 - 6x$.

Είναι $f''(x) = 12x - 6$

Λύνουμε την εξίσωση $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 12x - 6 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

και έχουμε:

x	$-\infty$		$1/2$		$+\infty$
f''		−	0	+	
f'		↘		↗	
			τ.ελαχ.		

Άρα για την τιμή $x = \frac{1}{2}$ ο ρυθμός μεταβολής της f γίνεται ελάχιστος.

Γ3. Έστω $y = \alpha x + \beta$ η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f' στο σημείο $A(-1, f'(-1))$, δηλαδή το $A(-1,\ 12)$.

- Είναι $f''(-1) = 12 \cdot (-1) - 6 = -18$
- Επειδή $f''(-1) = \alpha \Rightarrow \alpha = -18$

οπότε $y = -18x + \beta$

- Επειδή η γραφική παράσταση της f' διέρχεται από το σημείο $A(-1,\ f'(-1))$ δηλαδή $A(-1,\ 12)$ έχουμε $12 = -18\,(-1) + \beta \Leftrightarrow \beta = -6$

Άρα η ζητούμενη εξίσωση εφαπτομένης είναι $y = -18x - 6$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Είναι

$$f'(x) = \left(\sqrt{x^2+4} + 2018\right)' =$$

$$= \frac{(x^2+4)'}{2\sqrt{x^2+4}} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+4}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+4}},\ x \in \mathbb{R}.$$

Δ2. Είναι

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0.$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 0.$

$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x < 0.$

Ο πίνακας μεταβολών της f είναι:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f		↘	2020	↗	

Προκύπτει ότι είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,\ 0]$, γνησίως αύξουσα στο $[0,\ +\infty)$, ενώ παρουσιάζει ελάχιστο με τιμή 2020 στη θέση $x_0 = 0$.

Δ3. Είναι

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x^2+4)f'(x)-2x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(x^2+4)\dfrac{x}{\sqrt{x^2+4}}-2x}{x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\sqrt{x^2+4}-2x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x\left(\sqrt{x^2+4}-2\right)}{x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x^2+4}-2\right)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x^2+4}-2\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+4}+2\right)}{x\cdot\left(\sqrt{x^2+4}+2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+4}^{\,2}-2^2}{x\cdot\left(\sqrt{x^2+4}+2\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x\cdot\left(\sqrt{x^2+4}+2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\left(\sqrt{x^2+4}+2\right)}=0.$$