

# ΑΛΓΕΒΡΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ Β' ΛΥΚΕΙΟΥ 2004

## ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

### ΘΕΜΑ1ο

- A.** Αν  $a > 0$  με  $a \neq 1$ ,  $\theta > 0$  και  $k \in \mathbb{R}$ , να δείξετε ότι ισχύει:  
 $\log_a \theta^k = k \log_a \theta$ .

**Μονάδες 9**

- B.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

- α.** Για οποιουδήποτε θετικούς αριθμούς  $x_1, x_2$  ισχύει

$$\log \frac{x_1}{x_2} = \frac{\log x_1}{\log x_2}.$$

- β.** Το άθροισμα των πρώτων  $n$  όρων αριθμητικής προόδου  $(a_n)$  είναι

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n.$$

- γ.** Αν  $u(x)$  είναι το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου  $\Delta(x)$  δια του  $\delta(x)$ , όπου  $\delta(x)$  και  $u(x)$  είναι μη μηδενικά πολυώνυμα, τότε ο βαθμός του  $u(x)$  είναι μικρότερος από το βαθμό του  $\delta(x)$ .

- δ.** Εάν  $\alpha, \beta, \gamma$  είναι διαδοχικοί όροι οποιασδήποτε αριθμητικής προόδου, τότε ισχύει  $\beta^2 = \alpha\gamma$ .

**Μονάδες 4**

- Γ.** Να συμπληρώσετε στο τετράδιό σας στις παρακάτω ισότητες, τα κενά που σημειώνονται με ...

- α.**  $\sqrt[n]{a^m} = a^{\dots}$  όπου  $a > 0$ ,  $m$  ακέραιος και  $n$  θετικός ακέραιος

- β.**  $a^{\log_a \theta} = \dots$  όπου  $\theta > 0$  και  $a > 0$  με  $a \neq 1$

- γ.**  $\log_a a^x = \dots$  όπου  $a > 0$  με  $a \neq 1$  και  $x \in \mathbb{R}$

**Μονάδες 6**

- Δ.** Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον παρακάτω πίνακα και να τον συμπληρώσετε με το είδος της μονοτονίας των συναρτήσεων  $\eta_{\mu\chi}$  και  $\sigma_{\nu\chi}$ .

$x$	0	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$	$\frac{3\pi}{2}$	$2\pi$
$\eta_{\mu\chi}$					
$\sigma_{\nu\chi}$					

**Μονάδες 6**

### ΘΕΜΑ 2ο

α. Να λύσετε την εξίσωση  $\eta\mu 2x - \sqrt{3} \sigma\upsilon\nu x = 0$ .

**Μονάδες 13**

β. Να αποδείξετε ότι  $\frac{1 - \sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2\eta\mu\alpha + \eta\mu 2\alpha} = \epsilon\phi \frac{\alpha}{2}$   
για όλες τις τιμές του  $\alpha$  που ορίζεται η ισότητα.

**Μονάδες 12**

### ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται το πολυώνυμο  $P(x) = x^4 - 8x^3 + (5\alpha - 1)x^2 + 8x - 3\alpha - 6$ , όπου  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

α. Να κάνετε την διαίρεση του  $P(x)$  δια του  $x^2 - 1$  και να γράψετε τη σχετική ταυτότητα.

**Μονάδες 9**

β. Να βρείτε την τιμή του  $\alpha$ , ώστε η παραπάνω διαίρεση να είναι τέλεια.

**Μονάδες 4**

γ. Για  $\alpha = 3$ , να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης  $P(x) = 0$  καθώς και τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης  $P(x)$  είναι κάτω από τον άξονα  $x'x$ .

**Μονάδες 12**

### ΘΕΜΑ 4ο

A. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης

$$f(x) = \sqrt{-2\left(\frac{1}{5}\right)^{2x} + 3\left(\frac{1}{5}\right)^x - 1}.$$

**Μονάδες 13**

B. Δίνεται η συνάρτηση  $g(x) = 5^x$ . Να λύσετε την εξίσωση:

$$g(x) + g(x+1) + g(x+2) + \dots + g(x+49) = \frac{125(5^{50} - 1)}{4}.$$

**Μονάδες 12**

## ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

### ΘΕΜΑ 1ο

**A.** Έστω ότι είναι

$$\log_a \theta = x \quad (1)$$

Τότε σύμφωνα με τον ορισμό των λογαρίθμων θα έχουμε ισοδύναμα ότι

$$\theta = a^x$$

οπότε  $\theta^k = (a^x)^k \Leftrightarrow \theta^k = a^{xk} \Leftrightarrow$  (με  $k \in \mathbb{R}$ )

$$\log_a \theta^k = kx \quad (2) \quad (\text{ορισμός των λογαρίθμων})$$

Τέλος η (2) λόγω της (1) γράφεται

$$\log_a \theta^k = k \cdot \log_a \theta$$

**B.**

α.	β.	γ.	δ.
Λ	Σ	Σ	Λ

**Γ.**

**α.**  $\sqrt[v]{a^u} = a^{\frac{u}{v}}$

**β.**  $a^{\log_a \theta} = \theta$

**γ.**  $\log_a a^x = x$

**Δ.**

x	0	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$	$\frac{3\pi}{2}$	$2\pi$
ημx	↗	↘	↗	↘	↗
συνx	↘	↗	↘	↗	↘

### ΘΕΜΑ 2ο

**α.** Έχουμε

$$\eta\mu 2x - \sqrt{3} \cdot \sigma\upsilon\nu x = 0 \Leftrightarrow 2\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x - \sqrt{3} \cdot \sigma\upsilon\nu x = 0 \Leftrightarrow (2\eta\mu x - \sqrt{3}) \cdot \sigma\upsilon\nu x = 0$$

οπότε

$$2\eta\mu x - \sqrt{3} = 0 \quad (1)$$

ή

$$\sigma\upsilon\nu x = 0 \quad (2)$$

Από την (1) έχουμε

$$2\eta\mu x - \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \eta\mu x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \eta\mu x = \eta\mu \frac{\pi}{3}$$

οπότε

$$\left( x = 2κπ + \frac{\pi}{3} \text{ ή } x = 2κπ + \pi - \frac{\pi}{3} \right) \Leftrightarrow \left( x = 2κπ + \frac{\pi}{3} \text{ ή } x = 2κπ + \frac{2\pi}{3} \right)$$

με  $\kappa \in \mathbb{Z}$

Από την (2) έχουμε

$$\sin x = 0 \Leftrightarrow \sin x = \sin \frac{\pi}{2}. \quad \text{Άρα } x = 2κπ \pm \frac{\pi}{2} \text{ με } \kappa \in \mathbb{Z}$$

**β.**

$$\frac{1 - \sin 2\alpha}{2\eta\mu\alpha + \eta\mu 2\alpha} = \frac{1 - (1 - 2\eta\mu^2\alpha)}{2\eta\mu\alpha + 2\eta\mu\alpha \cdot \sin\alpha} = \frac{1 - 1 + 2\eta\mu^2\alpha}{2\eta\mu\alpha(1 + \sin\alpha)} = \frac{2\eta\mu^2\alpha}{2\eta\mu\alpha \cdot (1 + \sin\alpha)} =$$
$$= \frac{\eta\mu\alpha}{1 + \sin\alpha} = \frac{2\eta\mu \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \frac{\alpha}{2}}{1 + 2\sin^2 \frac{\alpha}{2} - 1} = \frac{2\eta\mu \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \frac{\alpha}{2}}{2\sin^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{\eta\mu \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} = \epsilon\phi \frac{\alpha}{2}$$

### ΘΕΜΑ 3ο

**α.**

$x^4 - 8x^3 + (5a - 1)x^2 + 8x - 3a - 6$	$x^2 - 1$
$-x^4 \quad + \quad x^2$	$x^2 - 8x + 5a$
<hr style="border: none; border-top: 1px solid black;"/>	
$-8x^3 + 5ax^2 + 8x - 3a - 6$	
$8x^3 \quad - 8x$	
<hr style="border: none; border-top: 1px solid black;"/>	
$5ax^2 \quad - 3a - 6$	
$-5ax^2 \quad + 5a$	
<hr style="border: none; border-top: 1px solid black;"/>	
$2a - 6$	

Από την παραπάνω διαίρεση προκύπτει η ταυτότητα:

$$P(x) = (x^2 - 1)(x^2 - 8x + 5a) + 2a - 6$$

**β.** Η παραπάνω διαίρεση είναι τέλεια όταν  $u = 0 \Leftrightarrow 2a - 6 = 0 \Leftrightarrow a = 3$ .

**γ.** Για  $a = 3$  η εξίσωση  $P(x) = 0$  γράφεται:

$$x^4 - 8x^3 + 14x^2 + 8x - 15 = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 1)(x^2 - 8x + 5 \cdot 3) = 0 \Leftrightarrow$$
$$(x - 1)(x + 1)(x^2 - 8x + 15) = 0 \Leftrightarrow$$
$$(x - 1)(x + 1)(x - 3)(x - 5) = 0.$$

Οι ρίζες της εξίσωσης είναι  $-1, 1, 3, 5$ .

Η γραφική παράσταση της  $P(x)$  είναι κάτω από τον  $x$ '  $x$  όταν και μόνον όταν  $P(x) < 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x + 1)(x - 3)(x - 5) < 0$ ,

που από τον πίνακα προσημών

$x$	$-\infty$	$-1$	$1$	$3$	$5$	$+\infty$
$p(x)$	$+$	$\circ$	$-$	$\circ$	$+$	$+$

προκύπτει ότι  $x \in (-1, 1) \cup (3, 5)$ .

### ΘΕΜΑ 4ο

**A.**

Το πεδίο ορισμού της  $f$  είναι οι τιμές του  $x$  για τις οποίες:

$$-2 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{2x} + 3 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^x - 1 \geq 0$$

Θέτοντας  $\left(\frac{1}{5}\right)^x = y > 0$  (1) έχουμε:

$$-2y^2 + 3y - 1 \geq 0 \Leftrightarrow 2y^2 - 3y + 1 \leq 0 \Leftrightarrow 2(y-1) \cdot \left(y - \frac{1}{2}\right) \leq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq y \leq 1 \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2} \leq \left(\frac{1}{5}\right)^x \leq 1 \Leftrightarrow 2 \geq 5^x \geq 1 \Leftrightarrow \log 2 \geq \log 5^x \geq \log 1 \Leftrightarrow 0 \leq x \cdot \log 5 \leq \log 2 \Leftrightarrow$$

$$0 \leq x \leq \frac{\log 2}{\log 5}$$

Σημ. Εάν χρησιμοποιούσαμε το φυσικό λογάριθμο θα είχαμε  $0 \leq x \leq \frac{\ln 2}{\ln 5}$

**B.**

Το πρώτο μέλος της δοσμένης εξίσωσης γράφεται:

$$g(x) + g(x+1) + g(x+2) + \dots + g(x+49) = 5^x + 5^{x+1} + 5^{x+2} + \dots + 5^{x+49} =$$

$$= 5^x + 5^x \cdot 5 + 5^x \cdot 5^2 + \dots + 5^x \cdot 5^{49} = 5^x \cdot (1 + 5 + 5^2 + \dots + 5^{49}) \quad (1)$$

όμως το άθροισμα  $1 + 5 + 5^2 + \dots + 5^{49}$  είναι άθροισμα των 50 πρώτων όρων μιας γεωμετρικής προόδου με πρώτο όρο  $a_1 = 1$  και λόγο  $\lambda = 5$ .  
Οπότε:

$$1 + 5 + 5^2 + \dots + 5^{49} = \frac{1 \cdot (5^{50} - 1)}{5 - 1} = \frac{5^{50} - 1}{4} \quad (2)$$

Έτσι η (1) λόγω της (2) γράφεται:

$$g(x) + g(x+1) + g(x+2) + \dots + g(x+49) = 5^x \cdot \frac{5^{50} - 1}{4}$$

Επομένως η δεδομένη εξίσωση γράφεται ισοδύναμα

$$5^x \cdot \frac{5^{50} - 1}{4} = \frac{125 \cdot (5^{50} - 1)}{4} \Leftrightarrow 5^x = 125 \Leftrightarrow 5^x = 5^3$$

Άρα  $x = 3$  (αφού η συνάρτηση  $5^x$  είναι 1-1).