ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΑΛΓΕΒΡΑ)
17 ΙΟΥΝΙΟΥ 2021
ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω $x_1, x_2, .., x_\kappa$ οι τιμές μίας μεταβλητής x ενός δείγματος μεγέθους ν, όπου κ, ν μη μηδενικοί φυσικοί αριθμοί *με* $\kappa \leq \nu$.

Τι ονομάζεται (απόλυτη) συχνότητα ν_i που αντιστοιχεί στην τιμή x_i, όπου i = 1, 2,..., κ ;

Μονάδες 4

Α2. Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της σταθερής συνάρτησης $f(x) = c$, όπου $x, c \in \mathbb{R}$ και c σταθερά, είναι ίση με το μηδέν, δηλαδή $f'(x) = (c)' = 0$.

Μονάδες 6

Α3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη **Λάθος,** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Οι διακριτές μεταβλητές μπορούν να πάρουν οποιαδήποτε τιμή ενός διαστήματος πραγματικών αριθμών (α, β).

β. Το ραβδόγραμμα χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση των τιμών μίας ποιοτικής μεταβλητής.

γ. Μία συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε σημεία $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) > f(x_2)$.

Μονάδες 6

Α4. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τις παρακάτω ισότητες και να τις συμπληρώσετε:

α. $\left(\frac{1}{x}\right)' =$ ...., με $x \neq 0$.

β. $(x^\nu)' =$ ...., όπου ν φυσικός αριθμός.

γ. $(c \cdot f(x))' =$ ...., όπου $c \in \mathbb{R}$ και $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνάρτηση παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - \alpha x + 2$, όπου $\alpha \in \mathbb{R}$ σταθερά και $x \in \mathbb{R}$.

Β1. Αν η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ σε σημείο με τετμημένη ίση με 1, να βρείτε την τιμή του α.

Μονάδες 5

Β2. Για $\alpha = 3$, να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης

$$g(x) = \frac{f(x)}{x^2 - 1}$$

Μονάδες 5

Β3. Για α = 3, να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x \to 1} g(x)$

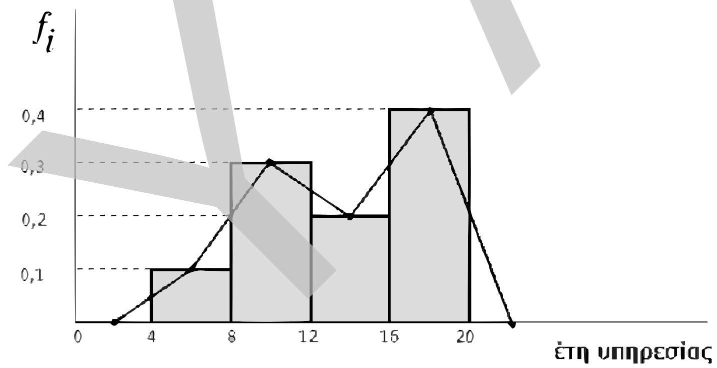
Μονάδες 7

Β4. Για α = 3, να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $\mathrm{M}(0, f(0))$.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται το παρακάτω ιστόγραμμα και το πολύγωνο των σχετικών συχνοτήτων f_i που αφορούν τα έτη υπηρεσίας 50 εκπαιδευτικών.



Γ1. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον πίνακα που ακολουθεί και να τον συμπληρώσετε με βάση το παραπάνω ιστόγραμμα,

Έτη υπηρεσίας [,)	Κεντρική τιμή x_i	Συχνότητα ν_i	Σχετική συχνότητα f_i	a_i
[4,8)		5		36°
[8,12)				
[12,16)	14			
[16,20)		20		144°
Σύνολο		50		360°

όπου a_i το αντίστοιχο τόξο ενός κυκλικού τμήματος στο κυκλικό διάγραμμα συχνοτήτων.

Μονάδες 12

Γ2. Πόσοι εκπαιδευτικοί έχουν συμπληρώσει τουλάχιστον 8 έτη υπηρεσίας;

Μονάδες 5

Γ3. Να βρείτε το ποσοστό των εκπαιδευτικών που έχουν συμπληρώσει υπηρεσία λιγότερη από 16 έτη.

Μονάδες 5

Γ4. Πόσο είναι το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από το πολύγωνο των σχετικών συχνοτήτων και τον οριζόντιο άξονα;

Μονάδες 3

ΘΕΜΑ Δ

Ένα οικόπεδο σχήματος ορθογωνίου έχει μήκος x μέτρα (m), πλάτος y μέτρα (m) και περίμετρο 80m.

Δ1. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του οικοπέδου ως συνάρτηση του x , δίνεται από τον τύπο $E(x) = -x^2 + 40x$ και να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $E(x)$.

Μονάδες 10

Δ2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση $E(x)$ ως προς τη μονοτονία της.

Μονάδες 6

Δ3. Για ποια τιμή του x το εμβαδόν του οικοπέδου γίνεται μέγιστο και ποια είναι η μέγιστη τιμή του;

Μονάδες 4

Δ4. Δύο οικόπεδα A και B σχήματος ορθογωνίου με περίμετρο 80m το καθένα έχουν μήκη x_A = 29,5m και x_B =34, 2m, αντίστοιχα. Να απαντήσετε αιτιολογημένα ποιο από τα δύο οικόπεδα έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν.

Μονάδες 5

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελ. 65.

Α2. Σχολικό βιβλίο σελ. 28.

Α3. **α) ΛΑΘΟΣ**

β) ΣΩΣΤΟ

γ) ΛΑΘΟΣ

Α4. **α)** $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$.

β) $\left(x^{\nu}\right)' = \nu \cdot x^{\nu-1}$.

γ) $\left(c \cdot f(x)\right)' = c \cdot f'(x)$.

ΘΕΜΑ Β

$$f(x) = x^2 - \alpha x + 2\,.$$

Β1. Για να τέμνει η C_f τον άξονα $x'x$ στο σημείο με τετμημένη 1 πρέπει:
$f(1) = 0$, άρα $1 - a + 2 = 0$, άρα $-a = -3$, άρα $\alpha = 3$.

Έτσι προκύπτει $f(x) = x^2 - 3x + 2$, $x \in \mathbb{R}$.

Β2. Πρέπει $x^2 - 1 \neq 0$.

Όμως $x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ή $x = -1$

Άρα $x \neq \pm 1$, οπότε $Ag = \mathbb{R} - \{-1,1\} = (-\infty, -1) \cup (-1,1) \cup (1, +\infty)$

Β3. $$\lim_{x\to 1} g(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-2)}{(x+1)} = \frac{1-2}{1+1} = \boxed{\frac{-1}{2}}$$

Σημ. Η παραγοντοποίηση του τριωνύμου $x^2 - 3x + 2$ μπορεί να γίνει με το σχήμα Horner:

$$\begin{array}{c|cc|l} 1 & -3 & 2 & 1 \\ \downarrow & 1 & -2 & \\ \hline 1 & -2 & \boxed{0} & \end{array}$$

Ή και με διάσπαση του όρου $-3x$:

$x^2 - 3x + 2 = x^2 - x - 2x + 2 = x(x-1) - 2(x-1) = (x-2)(x-1)$.

Β4. Για $x = 0$ στον τύπο της $x^2 - 3x + 2$ f(x) = $x^2 - 3x + 2$, προκύπτει $f(0) = 2$.

Έτσι ζητείται η εφαπτομένη (ε) της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $A(0, 2)$.

Η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο με τετμημένη 0 είναι της μορφής: $y = \alpha x + \beta$, όπου $\alpha = f'(0)$.

Η παράγωγος της f είναι: $f'(x) = 2x - 3$. Άρα $f'(0) = -3$.

Η εξίσωση της εφαπτομένης γίνεται έτσι $y = -3x + \beta$ (ε)

Όμως διέρχεται από το $A(0, 2)$ άρα $2 = -3 \cdot 0 + \beta$ ή $\beta = 2$.

Επομένως η ζητούμενη εξίσωση (ε) είναι $y = -3x + 2$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Από τις τεταγμένες του πολυγώνου σχετικών συχνοτήτων συμπληρώνουμε την αντίστοιχη στήλη (fi).

Επίσης οι κεντρικές τιμές xi κάθε κλάσης προκύπτουν ως το ημιάθροισμα των άκρων αυτής.

$$\text{Ύψος ιστογράμματος} = fi \begin{array}{l} \nearrow f_1 = 0,1 \\ \nearrow f_2 = 0,3 \\ \searrow f_3 = 0,2 \\ \searrow f_4 = 0,4 \end{array}$$

Έτη υπηρεσίας [,)	Κεντρική τιμή x_i	Συχνότητα ν_i	Σχετική συχνότητα f_i	α_i
[4, 8)	6	5	**0,1**	36^o
[8, 12)	10	**15**	**0,3**	108^o
[12, 16)	14	**10**	**0,2**	**72** ^{o}
[16, 20)	18	20	**0,4**	144^o
Σύνολο		50	1	360^o

Από τον τύπο $fi = \frac{v_i}{v} \Leftrightarrow vi = fi \cdot v$ υπολογίζουμε τις συχνότητες v_2, v_3:

$v_2 = f_2 \cdot v = 15$ και $v_3 = f_3 \cdot v = 10$

Τέλος, από τον τύπο $\alpha i = 3600 \cdot fi$ συμπληρώνουμε την τελευταία στήλη:

$a_2 = f_2 \cdot 360 = 108$
$a_3 = f_3 \cdot 360 = 72$

Γ2. Το πλήθος των εκπαιδευτικών που έχουν τουλάχιστον 8 έτη υπηρεσίας είναι $v_2 + v_3 + v_4 = 45$.

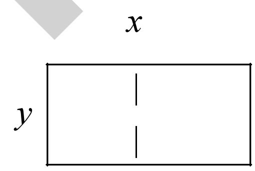
Γ3. Λιγότερο από 16 έτη υπηρεσίας έχουν συμπληρώσει: $f_1\% + f_2\% + f_3\% = 60\%$ των εκπαιδευτικών.

Γ4. Το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από το πολύγωνο των σχετικών συχνοτήτων και τον οριζόντιο άξονα είναι $E = f$ολ $=1$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Για τις διαστάσεις του ορθογωνίου οικοπέδου ισχύει: $x > 0$, $y > 0$.

Η περίμετρός του περιγράφεται από την ισότητα: $\Pi = 2x + 2y$



$\Pi = 80$ άρα $2x + 2y = 80$. Έτσι $x + y = 40 \Leftrightarrow y = 40 - x$.

Το εμβαδό του οικοπέδου δίνεται από τη συνάρτηση:

$E(x) = x \cdot y = x(40 - x) = 40x - x^2$ άρα $\boxed{E(x) = -x^2 + 40x}$

Πρέπει:

$x > 0$

$y > 0 \Leftrightarrow 40 - x > 0 \Leftrightarrow x < 40$

Άρα $0 < x < 40$

Επομένως το πεδίο ορισμού της συνάρτησης Ε είναι το διάστημα Δ= (0,40)

Δ2. $E'(x) = -2x + 40$

$E'(x) = 0 \Leftrightarrow -2x + 40 = 0 \Leftrightarrow -2x = -40 \Leftrightarrow x = 20$

$E'(x) > 0 \Leftrightarrow -2x + 40 > 0 \Leftrightarrow -2x > -40 \Leftrightarrow x < 20$

$E'(x) < 0 \Leftrightarrow -2x + 40 < 0 \Leftrightarrow -2x < -40 \Leftrightarrow x > 20$

Προκύπτει έτσι ο επόμενος πίνακας μεταβολών:

x	0		20		40
$E'(x)$		+	0	−	
$E(x)$		↗		↘	

Η E γνησίως φθίνουσα στο (0, 20], και γνησίως φθίνουσα στο [20, 40)

Δ3. $E_{\max} = E_{(20)} = 400m^2$ όταν $x = 20$

Δ4. Για τα μήκη x_A, x_B των οικοπέδων παρατηρούμε ότι:

$x_A = 29{,}5 > 20$ και $x_B = 34{,}2 > 20$.

Όμως επειδή έχουν περίμετρο 80, σύμφωνα με τον παραπάνω πίνακα μεταβολής η συνάρτηση του εμβαδού τους είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα (20, 40)

Συνεπώς:

$x_B > x_A \Leftrightarrow E(x_B) < E(x_A)$ και άρα το οικόπεδο Α έχει μεγαλύτερο εμβαδόν.

<u>εναλλακτικός τρόπος</u>

$x_A + y_A = 40 \Leftrightarrow y_A = 40 - 29{,}5 = 10{,}5m$

$E_A = 29{,}5 \cdot 10{,}5 = 309{,}75m^2$

$x_B + y_B = 40 \Leftrightarrow y_B = 40 - 34{,}2 = 5{,}8m$

Επομένως $E_A > E_B$