

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΔΥΝΑΜΕΩΝ

$$\alpha^0 = 1, \alpha \neq 0$$

$$\alpha^1 = \alpha$$

$$\alpha^\mu \cdot \alpha^\nu = \alpha^{\mu+\nu}$$

$$\alpha^\mu : \alpha^\nu = \alpha^{\mu-\nu}$$

$$(\alpha^\mu)^\nu = \alpha^{\mu \cdot \nu}$$

$$\alpha^{-\nu} = \frac{1}{\alpha^\nu} \quad \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{-\nu} = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^\nu$$

$$\alpha^\nu \cdot \beta^\nu = (\alpha\beta)^\nu$$

$$\alpha^\nu : \beta^\nu = \frac{\alpha^\nu}{\beta^\nu} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\nu$$

ΒΑΣΙΚΕΣ ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ

$$(\alpha \pm \beta)^2 = \alpha^2 \pm 2\alpha\beta + \beta^2$$

$$(\alpha \pm \beta)^3 = \alpha^3 \pm 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 \pm \beta^3$$

$$\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha + \beta)(\alpha - \beta)$$

$$\alpha^\nu - \beta^\nu = (\alpha - \beta)(\alpha^{\nu-1} + \alpha^{\nu-2}\beta + \dots + \alpha\beta^{\nu-2} + \beta^{\nu-1})$$

$$\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)$$

$$\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)$$

$$(\alpha + \beta + \gamma)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\alpha\beta + 2\alpha\gamma + 2\beta\gamma$$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΡΙΖΩΝ

$$\sqrt[\nu]{\alpha} = x \Leftrightarrow x^\nu = \alpha \quad (\alpha \geq 0)$$

$$\sqrt[\nu]{x \cdot y} = \sqrt[\nu]{x} \cdot \sqrt[\nu]{y}$$

$$\sqrt[\nu]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[\nu]{x}}{\sqrt[\nu]{y}}$$

$$\sqrt[\nu]{\sqrt[\mu]{x}} = \sqrt[\nu \cdot \mu]{x}$$

$$\sqrt[\nu \cdot \mu]{x^{\rho \cdot \mu}} = \sqrt[\nu]{x^\rho}$$

$$\sqrt[\nu]{x^\mu} = x^{\frac{\mu}{\nu}}$$

$$x^\nu = \alpha \Rightarrow \begin{cases} \nu : \text{αρτιος} \rightarrow x = \pm \sqrt[\nu]{\alpha}, \text{οταν} : \alpha \geq 0, \text{αδυνατη, οταν} : \alpha < 0 \\ \nu : \text{περιττος} \rightarrow x = \sqrt[\nu]{\alpha}, \text{οταν} : \alpha \geq 0, x = -\sqrt[\nu]{-\alpha}, \text{οταν} : \alpha < 0 \end{cases}$$

$$x^\nu = \alpha^\nu \Rightarrow \begin{cases} \alpha\nu, \nu : \text{αρτιος, τοτε} \rightarrow x = \pm \alpha \\ \alpha\nu, \nu : \text{περιττος, τοτε} \rightarrow x = \alpha \end{cases}$$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΑΠΟΛΥΤΩΝ

$$|x| = \begin{cases} -x & x \leq 0 \\ x & x > 0 \end{cases}$$

$$x^{2\nu} = |x|^{2\nu} = |x^{2\nu}|$$

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

$$|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$$

$$|-x| = |x|$$

$$\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|} \quad (y \neq 0)$$

$$|x - y| = |y - x|$$

$$|x| = \alpha \Leftrightarrow x = \pm \alpha, \alpha \geq 0$$

$$|x| \leq \alpha \Leftrightarrow -\alpha \leq x \leq \alpha$$

$$|x| \geq \alpha \Leftrightarrow x \leq -\alpha, x \geq \alpha, \alpha \geq 0$$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΔΙΑΤΑΞΗΣ

Για δύο πραγματικούς αριθμούς α, β ορίζουμε :

$$\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha - \beta > 0 \quad \text{και} \quad \alpha < \beta \Leftrightarrow \alpha - \beta < 0$$

Για τις ανισότητες έχουμε τις παρακάτω ιδιότητες :

1) Αν $\alpha > 0$ και $\beta > 0$, τότε $\alpha + \beta > 0$

2) Αν $\alpha < 0$ και $\beta < 0$, τότε $\alpha + \beta < 0$

3) Αν α, β ομόσημοι , τότε $\alpha \cdot \beta > 0$ και $\frac{\alpha}{\beta} > 0$

4) Αν α, β ετερόσημοι , τότε $\alpha \cdot \beta < 0$ και $\frac{\alpha}{\beta} < 0$

5) Για κάθε αριθμό α ισχύει : $\alpha^2 \geq 0$ ($\alpha^2 = 0$ μόνο όταν $\alpha = 0$)

6) Μεταβατική ιδιότητα : αν $\alpha > \beta$ και $\beta > \gamma$, τότε $\alpha > \gamma$

7) Πρόσθεση – Αφαίρεση στα μέλη μιας ανισότητας : $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha \pm \gamma > \beta \pm \gamma$

8) Πολλαπλασιασμός – Διαίρεση στα μέλη μιας ανισότητας :

i) Αν $\gamma > 0$, τότε : $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha \cdot \gamma > \beta \cdot \gamma$, $\alpha > \beta \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\gamma} > \frac{\beta}{\gamma}$

ii) Αν $\gamma < 0$, τότε : $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha \cdot \gamma < \beta \cdot \gamma$, $\alpha > \beta \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\gamma} < \frac{\beta}{\gamma}$

9) Αν $\alpha > \beta$ και $\gamma > \delta$, τότε $\alpha + \gamma > \beta + \delta$

10) Αν $\alpha, \beta, \gamma, \delta > 0$ και $\alpha > \beta, \gamma > \delta$, τότε $\alpha \cdot \gamma > \beta \cdot \delta$

Προσοχή : Δεν μπορούμε να διαιρούμε ανισότητες κατά μέλη !!!

11) Αν $\alpha, \beta > 0$ και n φυσικός $\neq 0$ ισχύει : $\alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha^n = \beta^n$ και $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha^n > \beta^n$

12) Αν α, β ομόσημοι , τότε : $\alpha < \beta \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha} > \frac{1}{\beta}$

ΣΥΝΟΛΑ ΑΡΙΘΜΩΝ

Φυσικοί: $N = \{0, 1, 2, \dots\}$

Ακέραιοι: $Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$

Ρητοί: $Q = \left\{ \frac{\alpha}{\beta} / \alpha \in N, \beta \in N^* \right\}$

Αρρητοι Α π.χ: $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \pi,$

Πραγματικοί: $R = Q \cup A$

Μιγαδικοί: $C = \{\alpha + \beta i / \alpha, \beta \in R\}$

ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ - ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

★ Αν n άρτιος

$$x^n = \alpha \Leftrightarrow x = \pm \sqrt[n]{\alpha} \quad (\alpha > 0) \quad x^n = \alpha, \alpha < 0 \text{ ΑΔΥΝΑΤΗ}$$

$$x^n \geq \alpha \Leftrightarrow |x| \geq \sqrt[n]{\alpha} \quad (\alpha > 0)$$

★ Αν n περιττός

$$x^n = \alpha \Leftrightarrow x = \sqrt[n]{\alpha} \quad (\alpha > 0) \quad x^n = \alpha \Leftrightarrow x = -\sqrt[n]{|\alpha|}$$

$$x^n \geq \alpha \Leftrightarrow x \geq \sqrt[n]{\alpha} \quad (\alpha > 0)$$

★ Ιδιότητες ανισώσεων

$$x > y \Leftrightarrow x \pm \alpha > y \pm \alpha \quad x > y \Leftrightarrow x \cdot \alpha > y \cdot \alpha, \alpha > 0$$

$$x > y \Leftrightarrow x \cdot \alpha < y \cdot \alpha, \alpha < 0$$

$$x > y > 0 \text{ \& } \alpha > \beta > 0 \Rightarrow x \cdot \alpha > y \cdot \beta$$

$$x > y \text{ \& } \alpha > \beta \Rightarrow x + \alpha > y + \beta$$

$$x > y > 0 \Leftrightarrow x^v < y^v, v \in \mathbb{N}^*$$

$$\text{Αν } x, y \text{ ομόσημοι τότε } x > y \Leftrightarrow \frac{1}{x} < \frac{1}{y}$$

ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ

$$\alpha_1 x + \beta_1 y = \gamma_1$$

$$\alpha_2 x + \beta_2 y = \gamma_2$$

Ορίζουσες

$$D = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} = \alpha_1 \cdot \beta_2 - \alpha_2 \cdot \beta_1$$

$$D_x = \begin{vmatrix} \gamma_1 & \beta_1 \\ \gamma_2 & \beta_2 \end{vmatrix} = \gamma_1 \cdot \beta_2 - \gamma_2 \cdot \beta_1 \quad D_y = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} = \alpha_1 \cdot \gamma_2 - \alpha_2 \cdot \gamma_1$$

Αν $D \neq 0$ το σύστημα έχει λύση $x = \frac{D_x}{D}$, $y = \frac{D_y}{D}$

Αν $D=0$ και $D_x \neq 0$ ή $D_y \neq 0$ το σύστημα ΑΔΥΝΑΤΟ

Αν $D=0$ και $D_x=D_y=0$ —————> το σύστημα ΑΟΡΙΣΤΟ

Αν $D=0$ και $D_x=D_y=0$ —————> $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 = 0, \gamma_1 \neq 0$ ή $\gamma_2 \neq 0$
το σύστημα ΑΔΥΝΑΤΟ

ΤΡΙΩΝΥΜΟ $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma, \alpha \neq 0, x \in \mathbb{R}$

	Εξίσωση	Παραγοντοποίηση
$\Delta > 0$	$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$	$\alpha (x - x_1)(x - x_2)$
$\Delta = 0$	$x_1 = -\frac{\beta}{2\alpha}$	$\alpha (x - x_1)^2$
$\Delta < 0$	Δεν έχει ρίζες στο $\mathbb{R}$	Δεν παραγοντοποιείται

Τύποι VIETA

Αν x_1, x_2 ρίζες της εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0, \alpha \neq 0$, τότε

Αθροισμα ριζών $S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha}$ Γινόμενο ριζών $P = x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{\alpha}$

Πρόσημο τριωνύμου

